Un metodo per la risoluzione numerica di modelli analitici differenziali ed il programma PEEI che lo computerizza.

GIACOMO LORENZONI

Riassunto

Sono esposte le basi matematiche di un programma al computer per risolvere numericamente modelli analitici differenziali cioè sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali. Sono descritte le proprietà analitiche di due noti modelli per approssimare funzioni di una variabile, il polinomio interpolatore e la spline cubica, e si perviene a nuove limitazioni superiori per gli errori del secondo. Sono presentati aspetti essenziali di una curva nello spazio euclideo multidimensionale, allo scopo di definire la derivata direzionale di una funzione e di ottenere una limitazione superiore per il massimo valore assoluto di una derivata definita su una curva. È mostrata, per un punto intersezione di più curve, l'espressione di una derivata parziale come una combinazione lineare di derivate direzionali, e ne è dedotta l'approssimazione ottimale quando i valori di queste non sono noti ma approssimabili. È formulata l'espressione di un generico modello analitico differenziale, evidenziandone dettagliatamente gli argomenti, individuando l'impedimento principale alla conoscenza di una sua soluzione esatta nell'esserne incognite le derivate parziali, circostanziando il contesto di informazioni contingentemente disponibili, e mostrando come se ne può calcolare una soluzione numerica risolvendo un inerente sistema di equazioni non differenziali. È esposto particolareggiatamente l'algoritmo che esprime una derivata di questo sistema come una combinazione lineare di sue incognite. Infine è presentato, descrivendone le caratteristiche di utilizzo e le azioni essenziali, il programma PEEI che è stato realizzato, sulla base della precedente trattazione, per calcolare soluzioni numeriche di modelli analitici differenziali.

Parole chiave: modelli analitici differenziali, soluzione numerica, sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali.

A method for the numerical resolution of differential analytical models and the program PEEI that computerizes it.

Summary

Are exposed the mathematical bases of a computer program to numerically solve differential analytical models, i.e. systems of partial differential equations. Are described the analytical properties of two well known models to approximate functions of a variable (the interpolating polynomial and the cubic spline) and new upper bounds for the errors of the second are obtained. Are presented essential aspects of a curve in the multidimensional Euclidean space, in order to define the directional derivative of a function and to obtain an upper bound for the absolute maximum value of a derivative definite on a curve. Is shown, for a point where intersect more curves, the expression of a partial derivative as a linear combination of directional derivatives, and of it is deduced the optimum approximation when the values of these are approximate. Is formulated the expression of a generic differential analytical model, highlighting in detail its arguments, identifying the principal impediment to the knowledge of an its exact solution in not knowing its partial derivatives, circumstantiating the context of information contingently available, and showing how it can be calculated an its numerical solution solving an inherent system of not differential equations. Is exposed in detail the algorithm that expresses a derivative of this system as a linear combination of his variables. Finally it is introduced, describing his use characteristics and essential actions, the program PEEI that was realized, on the basis of the previous treatment, to calculate numerical solutions of differential analytical models.

Keywords: *differential analytical models, numerical solution, systems of partial differential equations.*

INDICE

1 INTRODUZIONE

Questo scritto sarà rilasciato ufficialmente dall'Autore in data martedì 27 maggio 2008 e subito dopo sarà disponibile in http://www.giacomo.lorenzoni.name/mrnmad/.

La seguente esposizione concerne la risoluzione numerica di un generico modello analitico differenziale $\underline{\mathfrak{M}}$. Un tale $\underline{\mathfrak{M}}$ è un insieme di tante equazioni, generalmente alle derivate parziali, le cui incognite sono complessivamente altrettante funzioni di stesse variabili indipendenti.

La soluzione esatta di un $\underline{\mathfrak{M}}$ è le sue funzioni incognite. Una soluzione discreta di un $\underline{\mathfrak{M}}$ sono i valori numerici che le sue funzioni incognite assumono in un numero limitato di elementi del loro insieme di definizione. Una soluzione numerica è una approssimazione di una soluzione discreta. Una risoluzione è l'attività che rende nota una soluzione.

Nel seguito è sottintesa la conoscenza delle posizioni e degli strumenti simbolici logici e matematici descritti nella sez. 2 di [1]. I generi femminile e maschile di una $f(\underline{x})$ (di cui la $\underline{x}\equiv\{x_n;n=1,\not{n}\}$) riferiscono rispettivamente l'espressione matematica che costituisce la funzione analitica ed il suo valore numerico che corrisponde univocamente a quelli delle variabili $\underline{x}$. Ogni $f(\underline{x})$ è sottintesa continua nel proprio insieme di definizione $\underline{\mathfrak{R}}\langle\underline{x}\rangle$. Il valore di una $f(\underline{x})$ è detto locale quando è inteso in un certo punto di $\underline{\mathfrak{R}}_{\underline{x}}$.

2 COGNIZIONI PRELIMINARI.

2.1 *Due modelli per approssimare funzioni di una variabile: il polinomio interpolatore e la spline cubica.*

Si considerano il polinomio interpolatore e la spline cubica, tra i modelli (di cui nei [2] [3] [9]) per l'approssimazione di una $y(x)$ di cui la $\underline{\mathfrak{R}}\langle x\rangle\equiv[x_1,x_{\not{p}}]$.

Ambedue tali modelli sono interpolatori, cioè approssimano la $y(x)$ in base alla conoscenza dei punti di interpolazione $\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}$ (una $\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}$ indica una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\underline{A}$ e $\underline{B}$, conformemente alla (2.2.4) di [1]) di cui le $\{\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}\}\equiv\{x_p,y_p;p=1,\not{p}\}$ $\underline{x}\equiv\{x_p;p=1,\not{p}\}$ $\underline{y}\equiv\{y_p;p=1,\not{p}\}$ $y_p\equiv y(x_p)$ $\{x_{p-1}<x_p;p=2,\not{p}\}$, e assumono i valori $\underline{y}$ in corrispondenza dei rispettivi $\underline{x}$.

2.1.1 *Il polinomio interpolatore.*

Il polinomio interpolatore $P_I(x)$ che interpola i $\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}$, è il polinomio, di grado al più $\not{p}-1$, espresso dalla

$$P_I(x)\equiv\Sigma_{p=1,\not{p}}(\Gamma_p\cdot x^{p-1})=\Sigma_{p=1,\not{p}}(\Sigma_{p=1,\not{p}}(x_{pp}\cdot y_p)\cdot x^{p-1})=\Sigma_{p=1,\not{p}}(y_p\cdot\lambda_{PIp}(x)) \quad (1)$$

di cui le $\{\Gamma_p;p=1,\not{p}\}\equiv\underline{\Gamma}=\underline{\underline{x}}^{-1}\circ\underline{y}$ $\underline{\underline{x}}\equiv[\![x_p^{p-1};p=1,\not{p};p=1,\not{p}]\!]$ $\underline{\underline{x}}^{-1}\equiv[\![x_{pp};p=1,\not{p};p=1,\not{p}]\!]$ $\lambda_{PIp}(x)\equiv\Sigma_{p=1,\not{p}}(x_{pp}\cdot x^{p-1})$ $\lambda'_{PIp}(x)\equiv\Sigma_{p=1,\not{p}}((p-1)\cdot x_{pp}\cdot x^{p-2})$. Il sistema lineare $\underline{\underline{x}}\circ\underline{\Gamma}=\underline{y}$, che definisce i coefficienti $\underline{\Gamma}$ di $P_I(x)$, equivale a introdurre la $P_I(x)\equiv\Sigma_{p=1,\not{p}}(\Gamma_p\cdot x^{p-1})$ nella $\{P_I(x_p)=y_p;p=1,\not{p}\}$. La (1) ha in 0 un punto singolare che però, in base alla (2.4.2.10) di [1], si sottintende eliminato dalla $P_I(0)=\lim_{x\to 0}(\Gamma_1\cdot x^0+\Sigma_{p=2,\not{p}}(\Gamma_p\cdot x^{p-1}))=\Gamma_1$ che segue dalla $\lim_{x\to 0}(x^0)=1$ (la quale elimina anche l'eventuale forma indeterminata 0^0 che accadesse in $\underline{\underline{x}}$).

Le $\underline{\underline{x}}$ e $\underline{\underline{x}}^T$ sono un tipo di matrice detto di Vandermonde, di cui si ha (oltre alla $\det\langle\underline{\underline{A}}\rangle=\det\langle\underline{\underline{A}}^T\rangle$) la $\det\langle\underline{\underline{x}}\rangle=\Pi_{p=1,\not{p}-1}(\Pi_{p=p+1,\not{p}}(x_p-x_p))\neq 0$ che porta l'esistenza di $\underline{\underline{x}}^{-1}$ e quindi l'esistenza e l'unicità di $P_I(x)$.

La $\underline{\underline{\delta}}\langle\not{n}\rangle$, di cui la $\underline{\underline{\delta}}_{\not{n}}\equiv[\![\delta_{nn};n=1,\not{n};n=1,\not{n}]\!]$, è la matrice identità (o unità). Per una $\underline{\underline{A}}\equiv[\![A_{mn};m=1,\not{m};n=1,\not{n}]\!]$ si ha la $|\underline{\underline{A}}|\equiv[\![\,|A_{mn}|;m=1,\not{m};n=1,\not{n}]\!]$ che definisce $|\underline{\underline{A}}|$ come il valore assoluto di $\underline{\underline{A}}$. Nel caso $\not{m}=\not{n}$, l'errore numerico della inversione di $\underline{\underline{A}}$ può essere misurato dal $\max\langle|\underline{\underline{A}}\circ\underline{\underline{A}}^{-1}-\underline{\underline{\delta}}_{\not{n}}|\rangle$.

La $\underline{\underline{x}}$ è tipicamente malcondizionata in quanto il calcolo di $\underline{\underline{x}}^{-1}$ può indurre un rilevante $\max\langle|\underline{\underline{x}}\circ\underline{\underline{x}}^{-1}-\underline{\underline{\delta}}_{\not{p}}|\rangle$ anche se $\not{p}$ non è molto grande e si rappresentano i numeri per mezzo di una lunga sequenza di cifre. Questo inconveniente riguarda anche il calcolo dei $\underline{\Gamma}$ come soluzione di $\underline{\underline{x}}\circ\underline{\Gamma}=\underline{y}$.

Lo stesso $P_I(x)$ espresso dalla (1) ha la forma di Lagrange

$$P_I(x)=\Sigma_{p=1,\not{p}}(y_p\cdot Д_p(x)/Д_p(x_p))=Д(x)\cdot\Sigma_{p=1,\not{p}}(y_p/((x-x_p)\cdot Д_p(x_p))) \qquad (2)$$

di cui le $Д_p(x)\equiv\Pi_{p=1,\not{p};p\neq p}(x-x_p)$ $Д(x)\equiv\Pi_{p=1,\not{p}}(x-x_p)$, e che mostra la $\lambda_{PIp}(x)=Д_p(x)/Д_p(x_p)$ di cui la $\lambda'_{PIp}(x)=\Sigma_{a=1,\not{p};a\neq p}(\Pi_{p=1,\not{p};p\neq p;p\neq a}(x-x_p))/Д_p(x_p)$.

La (2) è utilizzabile vantaggiosamente al posto della (1), giacché, non richiedendo il calcolo di $\underline{\underline{x}}^{-1}$ né la risoluzione di $\underline{\underline{x}}\circ\underline{\Gamma}=\underline{y}$, implica minori oneri ed errori numerici.

Indipendentemente dalla particolare forma che esprime il $P_I(x)$, la quale ne influenza come detto il solo aspetto numerico, per il suo errore analitico $\epsilon_{PI}(x)$ si hanno le

$$\epsilon_{PI}(x)\equiv y(x)-P_I(x)=y^{(\not{p})}(\xi_1(x))\cdot Д(x)/\not{p}! \qquad (3)$$

$$\epsilon_{PI}^{(k)}(x)\equiv y^{(k)}(x)-P_I^{(k)}(x)=y^{(\not{p})}(\xi_2(x))\cdot\Pi_{p=1,\not{p}-k}(x-\zeta_{kp})/(\not{p}-k)! \qquad (4)$$

di cui le $1\leq k\leq\not{p}-1$ $\{\xi_i(x)\in(x_1,x_{\not{p}});i=1,2\}$ $\{\zeta_{kp}\in(x_p,x_{p+k});p=1,\not{p}-k\}$ $\{y(x)\in C^{\not{p}}(\mathfrak{R}_x)\}\underline{\rightarrow}\{(3),(4)\}$.

Le (3) e (4) portano le rispettive

$$|\epsilon_{PI}(x)|=|y^{(\not{p})}(\xi_1(x))|\cdot|Д(x)|/\not{p}!\leq\Pi_{p=1,\not{p}}(|x-x_p|)\cdot\Phi\langle y^{(\not{p})}\rangle/\not{p}!$$

$$|\epsilon_{PI}^{(k)}(x)|=|y^{(\not{p})}(\xi_2(x))|\cdot\Pi_{p=1,\not{p}-k}(|x-\zeta_{kp}|)/(\not{p}-k)!\leq\Pi_{p=1,\not{p}-k}(\not{\Delta}_p)\cdot\Phi\langle y^{(\not{p})}\rangle/(\not{p}-k)!$$

di cui le $\Phi\langle y^{(p)}\rangle\equiv\max\langle|y^{(p)}(x)|/x\in(x_1,x_{\not{p}})\rangle$ e $\not{\Delta}_p\equiv\max\langle|x-x_p|,|x-x_{p+k}|\rangle$.

Il $P_I(x)$ ha come inconvenienti l'andamento oscillante e l'eventualità che questo aumenti con $\not{p}$. Infatti, pure attendendo sensatamente per la maggior parte dei casi che, con l'aumentare il $\not{p}$ di $\underline{x}$ equidistanti (cioè tali che $\{x_p-x_{p-1}=\Delta;p=2,\not{p}\}$), i rispettivi polinomi interpolatori convergano ordinatamente alla $y(x)$, nondimeno tale convergenza non è sempre sicuramente conseguibile, avendo tuttavia a questo riguardo il miglioramento del sostituire i $\underline{x}$ equidistanti con quelli disposti nei punti di Chebyshev definiti dalla $\{x_p=(x_{\not{p}}+x_1)/2+(x_{\not{p}}-x_1)\cdot\cos\langle\pi\cdot(\not{p}-p)/(\not{p}-1)\rangle/2;p=1,\not{p}\}$.

2.1.2 *La spline cubica.*

La spline cubica naturale $S(x)$ che interpola i $\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}$, è la funzione polinomiale a tratti costituita dai $\not{p}-1$ polinomi $\{S_p(x);p=1,\not{p}-1\}$ nel senso della

$$S(x)=S_p(x)\equiv\{S_p(x)\,|\,x\in\underline{\mathfrak{I}}_p\} \qquad (1)$$

di cui la $\underline{\mathfrak{I}}_p\equiv[x_p,x_{p+1}]$.

Ognuno dei $\{S_p(x);p=1,\not{p}-1\}$ è definito nel corrispondente $\underline{\mathfrak{I}}_p$, ha grado al più 3, ed è soddisfatto il sistema lineare di $4\cdot(\not{p}-1)$ equazioni

$$\{S_p(x_p)=y_p,S_p(x_{p+1})=y_{p+1};p=1,\not{p}-1\} \qquad (2)$$

$$\{S_{p-1}'(x_p)=S_p'(x_p);p=2,\not{p}-1\} \qquad (3)$$

$$\{S_{p-1}''(x_p)=S_p''(x_p);p=2,\not{p}-1\} \qquad (4)$$

$$S_1''(x_1)=0\ \ S_{\not{p}-1}''(x_{\not{p}})=0 \qquad (5)$$

nelle altrettante incognite costituite dai coefficienti di tali $\not{p}-1$ polinomi.

L'onere numerico del conoscere i $\{S_p(x);p=1,ꝑ-1\}$ risolvendo questo sistema con un algoritmo di applicabilità generale (quale quello di Gauss con la variante del "massimo *pivot*", di cui nei [4] [9]), può essere ridotto trasformando tale sistema come segue.

Si pongono le $\{U_p\equiv S_p''(x_p);p=1,ꝑ-1\}$ e $U_ꝑ\equiv S_{ꝑ-1}''(x_ꝑ)$, che consentono sia di sostituire le (4) con il sottintendere le $\{U_p=S_{p-1}''(x_p)=S_p''(x_p);p=2,ꝑ-1\}$ sia di scrivere le (5) nella forma $U_1=U_ꝑ=0$.

La definizione di $S_p(x)$ come un polinomio di grado al più 3, porta che $S_p''(x)$ è un polinomio di grado al più 1. Ciò e le $U_p=S_p''(x_p)$ $U_{p+1}=S_p''(x_{p+1})$ portano la $Æ\langle S_p''(x),\{x_p,U_p;p=p,p+1\}\,/P_1(x),\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}\,/(2.1.1.2)\rangle$ che dà luogo alla

$$S_p''(x)=(U_{p+1}\cdot(x-x_p)-U_p\cdot(x-x_{p+1}))/\Delta_p \tag{6}$$

di cui la $\Delta_p=x_{p+1}-x_p$ e che (in base alla (1)) mostra la $S(x)\in C^2(\mathfrak{R}_x)$.

Da: $S_p'(x)-V_p=\int(S_p''(x)\cdot dx)$ (dovuta alla $\{F(x)\equiv\int(f(x)\cdot dx)\}\equiv\{F'(x)=f(x)\}$); (6); segue

$$S_p'(x)=\int(S_p''(x)\cdot dx)+V_p=\int((U_{p+1}\cdot(x-x_p)-U_p\cdot(x-x_{p+1}))\cdot dx)/\Delta_p+V_p=$$
$$(U_{p+1}\cdot(x-x_p)^2-U_p\cdot(x-x_{p+1})^2)/(2\cdot\Delta_p)+V_p \tag{7}$$

Da: $S_p(x)-W_p=\int(S_p'(x)\cdot dx)$; (7); segue

$$S_p(x)=\int(S_p'(x)\cdot dx)+W_p=\int(((U_{p+1}\cdot(x-x_p)^2-U_p\cdot(x-x_{p+1})^2)/(2\cdot\Delta_p)+V_p)\cdot dx)+W_p=$$
$$(U_{p+1}\cdot(x-x_p)^3-U_p\cdot(x-x_{p+1})^3)/(6\cdot\Delta_p)+V_p\cdot(x-x_p)+W_p \tag{8}$$

Questa consente di scrivere le (2) come le

$$\{W_p=y_p-U_p\cdot\Delta_p^2/6,V_p=(y_{p+1}-y_p)/\Delta_p-(U_{p+1}-U_p)\cdot\Delta_p/6;p=1,ꝑ-1\} \tag{9}$$

La (7) e l'espressione di V_p nella (9) consentono di scrivere le (3) come le $\{U_p\cdot\Delta_p/6+U_{p+1}\cdot(\Delta_p+\Delta_{p+1})/3+U_{p+2}\cdot\Delta_{p+1}/6=Y_p;p=1,ꝑ-2\}$ di cui la $Y_p\equiv(y_{p+2}-y_{p+1})/\Delta_{p+1}-(y_{p+1}-y_p)/\Delta_p$, e quindi, usando la notazione matriciale e introducendo le (5) nella forma $U_1=U_ꝑ=0$, come il sistema lineare $\underline{\underline{S}}\circ\underline{U}=\underline{Y}$ di $ꝑ-2$ equazioni nelle altrettante incognite $\underline{U}$, definito dalle $\underline{U}\equiv\{U_p;p=2,ꝑ-1\}$ $\underline{Y}\equiv\{Y_p;p=1,ꝑ-2\}$ $\underline{\underline{S}}\equiv[\![S_{pp};p=1,ꝑ-2;p=1,ꝑ-2]\!]$ con gli elementi di $\underline{\underline{S}}$ tutti nulli a meno delle $\{S_{11}=(\Delta_1+\Delta_2)/3,S_{12}=\Delta_2/6\}$ $\{S_{ꝑ-2,ꝑ-3}=\Delta_{ꝑ-2}/6,S_{ꝑ-2,ꝑ-2}=(\Delta_{ꝑ-2}+\Delta_{ꝑ-1})/3\}$ $\{S_{p,p-1}=\Delta_p/6,S_{pp}=(\Delta_p+\Delta_{p+1})/3,S_{p,p+1}=\Delta_{p+1}/6;p=2,ꝑ-3\}$, e che equivale al $\underline{U}=\underline{\underline{S}}^{-1}\circ\underline{Y}$ di cui la $\underline{\underline{S}}^{-1}\equiv[\![\mathcal{S}_{pp};p=1,ꝑ-2;p=1,ꝑ-2]\!]$ e quindi alle $\{U_{p+1}=\Sigma_{p=1,ꝑ-2}(\mathcal{S}_{pp}\cdot Y_p);p=1,ꝑ-2\}$.

Il sistema costituito dalle (2) (3) (4) e (5) è stato trasformato in quello costituito dalle (9) $\underline{U}=\underline{\underline{S}}^{-1}\circ\underline{Y}$ e $U_1=U_ꝑ=0$. Perciò la introduzione di queste nelle (8) e (7) rende note le espressioni dei $\{S_p(x),S_p'(x);p=1,ꝑ-1\}$, avendo in particolare (e con riferimento alla (1)) le

$$\{S'(x_p)=S_p'(x_p)=\Sigma_{p=1,ꝑ}(\lambda_{pp}\cdot y_p);\forall p<ꝑ\}\ \{S'(x_p)=S_{ꝑ-1}'(x_p)=\Sigma_{p=1,ꝑ}(\lambda_p\cdot y_p);\forall p\equiv ꝑ\} \tag{10}$$

di cui le

$$\lambda_{pp}\equiv(\delta_{p,p+1}\cdot\bar{\delta}_{p1}-\delta_{pp}\cdot\bar{\delta}_{pꝑ})/\Delta_p-\Delta_p\cdot(\bar{\delta}_{p1}\cdot\bar{\delta}_{pꝑ}\cdot\mathbb{K}_{pp}/3+\bar{\delta}_{p+1,ꝑ}\cdot\mathbb{K}_{p+1,p}/6)$$
$$\lambda_p\equiv(\delta_{pꝑ}-\delta_{p,ꝑ-1})\cdot\Delta_{ꝑ-1}{}^{-1}+\Delta_{ꝑ-1}\cdot\bar{\delta}_{ꝑ-1,1}\cdot\mathbb{K}_{ꝑ-1,p}/6$$
$$\mathbb{K}_{pp}\equiv\bar{\delta}_{p,ꝑ-1}\cdot\bar{\delta}_{pꝑ}\cdot\mathcal{S}_{p-1,p}/\Delta_p-\bar{\delta}_{pꝑ}\cdot\bar{\delta}_{p1}\cdot\mathcal{S}_{p-1,p-1}\cdot(\Delta_{p-1}{}^{-1}+\Delta_p{}^{-1})+\bar{\delta}_{p1}\cdot\bar{\delta}_{p2}\cdot\mathcal{S}_{p-1,p-2}/\Delta_{p-1}$$

intendendo la $\bar{\delta}\langle a,b\rangle\equiv1-\delta\langle a,b\rangle$ (da cui le $\{\bar{\delta}_{ab}=1;\forall a\neq b\}$ $\{\bar{\delta}_{ab}=0;\forall a=b\}$) e considerando nullo ogni addendo dove compare almeno un fattore nullo.

La spline cubica completa $S_C(x)$ differisce dalla $S(x)$ solo per la sostituzione delle (5) con l'assegnazione di valori noti ai $S_C'(x_1)$ e $S_C'(x_ꝑ)$. La spline cubica periodica $S_P(x)$ differisce dalla $S(x)$ solo per la sostituzione delle (5) con le $S_P'(x_1)=S_P'(x_ꝑ)$ $S_P''(x_1)=S_P''(x_ꝑ)$ quando si ha la $y(x_1)=y(x_ꝑ)$.

Per la $S_C(x)$ si hanno (in [2]) le

$$|\epsilon_{SC}(x)|=|y(x)-S_C(x)|\leq(7/8)\cdot\bar{\Phi}\langle y^{(4)}\rangle\cdot\bar{\Delta}^5/\bar{\Delta}\ \ |\epsilon_{SC}'(x)|=|y'(x)-S_C'(x)|\leq(7/4)\cdot\bar{\Phi}\langle y^{(4)}\rangle\cdot\bar{\Delta}^4/\bar{\Delta} \tag{11}$$

di cui le

$\cancel{\Phi}\langle y^{(p)}\rangle\equiv\max\langle|y^{(p)}(x)|\ /x\in\mathbb{R}_x\rangle\ \cancel{A}\equiv\max\langle\Delta_p;p=1,\cancel{p}-1\rangle\ \cancel{\Delta}\equiv\min\langle\Delta_p;p=1,\cancel{p}-1\rangle\ \{y(x)\in C^4(\mathbb{R}_x)\}\underline{\rightarrow}(11)$.
Con l'aumentare di $\cancel{p}$ si ha la convergenza, di ogni successiva $S_C(x)$ e delle sue derivate fino al secondo ordine, alla $y(x)$ e le sue corrispondenti derivate, con la sola condizione che rimanga limitato il $\cancel{A}/\cancel{\Delta}$, e avendo nel caso di $\underline{x}$ equidistanti la convergenza più rapida indicata dalla $|\epsilon_{SC}(x)|\leq(7/8)\cdot\cancel{\Phi}\langle y^{(4)}\rangle\cdot\cancel{A}^4$. Nel limite per $\cancel{p}\rightarrow\infty$ conforme alla detta condizione, le (11) valgono anche per la $S(x)$ in quanto questa coincide con la $S_C(x)$.

Gli inconvenienti del $P_I(x)$ (detti in sez. 2.1.1) sono risolti in modo eccellente dalla $S(x)$, poiché le oscillazioni di questa sono minime tra quelle di tutte le diverse funzioni di classe 2 in $\mathbb{R}_x$ che interpolano i $\underline{x}\Leftrightarrow\underline{y}$, e per le dette proprietà di convergenza al valore esatto con l'aumentare di $\cancel{p}$.

2.1.2.1 *Altre limitazioni superiori per gli errori della spline cubica.*

Si chiama $\mathbb{S}(x)$ una spline cubica che differisce dalla $S(x)$ solo per la sostituzione delle (2.1.2.5) con altre due equazioni, avendo perciò le $Æ\langle S\ /\mathbb{S}\rangle\ Æ\langle S_C\ /\mathbb{S}\rangle\ Æ\langle S_P\ /\mathbb{S}\rangle$. In conformità a ciò si sottintende la possibilità di sostituire S con $\mathbb{S}$ quando si trattano proprietà indipendenti dalle (2.1.2.5).

Da: $\{g(\underline{x})/|g(\underline{x})|\equiv\omega_{g(\underline{x})};\forall\underline{x}\in\underline{\mathfrak{R}_x}\}$; il teorema della media (detto in sez. 2.4.4 di [1]); segue IPM

$$\{\textstyle\int_{\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(f(\underline{x})\cdot g(\underline{x})\cdot d\underline{x})=\omega_{g(\underline{x})}\cdot\int_{\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(f(\underline{x})\cdot|g(\underline{x})|\cdot d\underline{x})=f(\underline{\underline{x}})\cdot\int_{\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(g(\underline{x})\cdot d\underline{x})\}\underline{\leftarrow}$$
$$\{g(\underline{x})/|g(\underline{x})|\equiv\omega_{g(\underline{x})};\forall\underline{x}\in\underline{\mathfrak{R}_x}\}\qquad(1)$$

di cui la $\underline{\underline{x}}\in\underline{\mathfrak{R}_x}$ e che se $g(\underline{x})\equiv1$ dà luogo alla $\int_{\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(f(\underline{x})\cdot d\underline{x})=f(\underline{\underline{x}})\cdot\mathrm{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}_x}\rangle$.

La (2.1.2.6) porta le $x\in(x_p,x_{p+1})\underline{\rightarrow}\{\mathbb{S}_p^{(3)}(x)=(U_{p+1}-U_p)/\Delta_p\}\quad \mathbb{S}_1^{(3)}(x_1)=(U_2-U_1)/\Delta_1\quad \mathbb{S}_{\cancel{p}-1}^{(3)}(x_{\cancel{p}})=(U_{\cancel{p}}-U_{\cancel{p}-1})/\Delta_{\cancel{p}-1}$. Queste e la (2.1.2.1) portano le

$$x\in(x_p,x_{p+1})\underline{\rightarrow}\{\mathbb{S}^{(3)}(x)=(U_{p+1}-U_p)/\Delta_p\}\ \mathbb{S}^{(3)}(x_1)=(U_2-U_1)/\Delta_1\ \mathbb{S}^{(3)}(x_{\cancel{p}})=(U_{\cancel{p}}-U_{\cancel{p}-1})/\Delta_{\cancel{p}-1}\}\qquad(2)$$

Si sottintendono le $y(x)\in C^4(\mathbb{R}_x)$ $\epsilon_p^{(o)}\equiv\epsilon^{(o)}(x_p)$ $\epsilon^{(o)}(x)\equiv\mathbb{S}^{(o)}(x)-y^{(o)}(x)$ $\mathbb{R}\langle t_p\rangle\equiv(x_p,x_{p+1})$ $\acute{\imath}_p(t)\equiv t-x_p$ $\grave{\imath}_p(t)\equiv t-x_{p+1}$, e la $\omega\langle G\rangle\equiv G/|G|$. Le

$\{Æ\langle x_p,x_{p+1}\ /\underline{x}\ /(2.1.1.2)\rangle,t\in\underline{\mathfrak{J}_p}\}\underline{\rightarrow}\{P_I(t)=(\acute{\imath}_p(t)\cdot y_{p+1}-\grave{\imath}_p(t)\cdot y_p)/\Delta_p\}$

$\{Æ\langle\{x_p,x_{p+1}\},\{\epsilon_p'',\epsilon_{p+1}''\}\ /\underline{x},\underline{y}\ /(2.1.1.3)\rangle,t\in\underline{\mathfrak{J}_p}\}\underline{\rightarrow}\{\epsilon''(t)-P_I(t)=\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)\cdot\epsilon^{(4)}(\xi_A(t))/2\}$

di cui la $\{t\in\underline{\mathfrak{J}_p}\}\underline{\rightarrow}\{\xi_A(t)\in\mathbb{R}_{t\langle p\rangle}\}$; e la $\{t\in\mathbb{R}_{t\langle p\rangle}\}\underline{\rightarrow}\{\epsilon^{(4)}(t)=-y^{(4)}(t)\}$ (dovuta alle (2)); portano la $A_p(t_p)=0$ di cui le $A_p(t)\equiv A_p(t)+2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)\cdot y^{(4)}(\xi_A(t))$ $A_p(t)\equiv\Delta_p\cdot\epsilon''(t)+\grave{\imath}_p(t)\cdot\epsilon_p''-\acute{\imath}_p(t)\cdot\epsilon_{p+1}''$.

Da: ciò, distributività dell'integrale, e $\int_{\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(f(\underline{x})\cdot d\underline{x})=\lim_{\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle}(\int_{\mathfrak{R}}(f(\underline{x})\cdot d\underline{x}))$; (1), e costanza di $\omega\langle\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)\rangle$ se $t\in\underline{\mathfrak{J}_p}$; $\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)=\acute{\imath}_p^2(t)-\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p(t)$ dovuta a $\Delta_p\equiv\acute{\imath}_p(t)-\grave{\imath}_p(t)$; $\lim_{a\rightarrow x\langle p\rangle^+}(\int_{a,t\langle p\rangle}(A_p(t)\cdot dt))=0$ dovuta alle $A_p(t_p)=0$ e $\mathbb{R}_{t\langle p\rangle}\equiv(x_p,x_{p+1})$; segue

$$\lim_{a\rightarrow x\langle p\rangle^+}(\textstyle\int_{a,t\langle p\rangle}(A_p(t)\cdot dt))=\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(A_p(t)\cdot dt)+2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)\cdot y^{(4)}(\xi_A(t))\cdot dt)=$$
$$\textstyle\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(A_p(t)\cdot dt)+2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot y^{(4)}(\xi_B(t_p))\cdot\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(\acute{\imath}_p(t)\cdot\grave{\imath}_p(t)\cdot dt)=B_p(t_p)=0\qquad(3)$$

di cui le

$$B_p(t)\equiv\Delta_p\cdot\epsilon'(t)-\Delta_p\cdot\epsilon_p'+2^{-1}\cdot(\grave{\imath}_p^2(t)-\Delta_p^2)\cdot\epsilon_p''-2^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^2(t)\cdot\epsilon_{p+1}''+\Delta_p\cdot(6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^3(t)-4^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^2(t))\cdot y^{(4)}(\xi_B(t))$$
$$\xi_B(t_p)\in\mathbb{R}_{t\langle p\rangle}.$$

Da: $\epsilon_p=0$; (1), e costanza di $\omega\langle6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p(t)-4^{-1}\cdot\Delta_p\rangle$ se $t\in\underline{\mathfrak{J}_p}$; $\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(B_p(t)\cdot dt)=0$ dovuta a $B_p(t_p)=0$ (affermata dalla (3)) e a $\mathbb{R}_{t\langle p\rangle}\equiv(x_p,x_{p+1})$; segue

$$\textstyle\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(B_p(t)\cdot dt)=\Delta_p\cdot\epsilon(t_p)-\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p(t_p)\cdot\epsilon_p'+6^{-1}\cdot(\grave{\imath}_p^3(t_p)+\Delta_p^3-3\cdot\Delta_p^2\cdot\acute{\imath}_p(t_p))\cdot\epsilon_p''-6^{-1}\cdot\epsilon_{p+1}''\cdot\acute{\imath}_p^3(t_p)+$$
$$\Delta_p\cdot\textstyle\int_{x\langle p\rangle,t\langle p\rangle}(y^{(4)}(\xi_B(t))\cdot\acute{\imath}_p^2(t)\cdot(6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p(t)-4^{-1}\cdot\Delta_p)\ dt)=C_p(t_p)=0\qquad(4)$$

di cui le

$C_p(t)\equiv\Delta_p\cdot\epsilon(t)-\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p(t)\cdot\epsilon_p'+6^{-1}\cdot(\acute{\imath}_p^3(t)-3\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^2(t))\cdot\epsilon_p''-6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^3(t)\cdot\epsilon_{p+1}''+\Delta_p\cdot(24^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^4(t)-12^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^3(t))\cdot y^{(4)}(\xi_C(t))\ \xi_C(t_p)\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$.

Attuando per i $\{x_{p+1},t_p\}$ un procedimento simile a quello che per i $\{x_p,t_p\}$ ha condotto alle (3) e (4) a partire dalla $A_p(t_p)=0$, si ottengono le $D_p(t_p)=0$ $E_p(t_p)=0$ di cui le

$D_p(t)\equiv\Delta_p\cdot\epsilon'(t)-\Delta_p\cdot\epsilon_{p+1}'+2^{-1}\cdot\grave{\imath}_p^2(t)\cdot\epsilon_p''+2^{-1}\cdot(\Delta_p^2-\acute{\imath}_p^2(t))\cdot\epsilon_{p+1}''+$
$\Delta_p\cdot(6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^3(t)+12^{-1}\cdot\Delta_p^3-4^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^2(t))\cdot y^{(4)}(\xi_D(t))\ \xi_D(t_p)\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$

$E_p(t)\equiv\Delta_p\cdot\epsilon(t)-\Delta_p\cdot\grave{\imath}_p(t)\cdot\epsilon_{p+1}'+6^{-1}\cdot\grave{\imath}_p^3(t)\cdot\epsilon_p''+6^{-1}\cdot(3\cdot\Delta_p^2\cdot\grave{\imath}_p(t)+\Delta_p^3-\acute{\imath}_p^3(t))\cdot\epsilon_{p+1}''+$
$\Delta_p\cdot(24^{-1}\cdot(\acute{\imath}_p^4(t)-\Delta_p^4)+12^{-1}\cdot\Delta_p\cdot(\Delta_p^2\cdot\grave{\imath}_p(t)-\acute{\imath}_p^3(t)+\Delta_p^3))\cdot y^{(4)}(\xi_E(t_p))\ \xi_E(t_p)\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$

Il limite della $B_p(t_p)=0$ per $t_p\to x_{p+1}$ dà luogo, intendendo la $\xi_A\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$, alla

$$\epsilon_p'-\epsilon_{p+1}'+2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_p''+2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_{p+1}''+12^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot y^{(4)}(\xi_A)=0 \tag{5}$$

Il limite della $C_p(t_p)=0$ per $t_p\to x_{p+1}$ dà luogo, considerando anche la $\epsilon_{p+1}=0$ e intendendo la $\xi_B\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$, alla

$$\epsilon_p'+3^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_p''+6^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_{p+1}''+24^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot y^{(4)}(\xi_B)=0 \tag{6}$$

Il limite della $E_p(t_p)=0$ per $t_p\to x_p$ dà luogo, intendendo la $\xi_C\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}$, alla

$$\epsilon_{p+1}'-6^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_p''-3^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\epsilon_{p+1}''-24^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot y^{(4)}(\xi_C)=0 \tag{7}$$

Il teorema di Rolle afferma la

$$\{f(x)\in C^0[a,b],f(x)\in C^1(a,b),f(a)=f(b)\}\underline{\rightarrow}\exists\{f'(x)=0\mid x\in(a,b)\} \tag{8}$$

Si pone la $F(x)\equiv\epsilon''(x)-(\acute{\imath}_p(x)\cdot\epsilon_{p+1}''-\grave{\imath}_p(x)\cdot\epsilon_p'')/\Delta_p$. Questa, la $\mathbb{S}(x)\in C^2(\underline{\mathfrak{R}}_x)$ e la $\mathbb{S}(x)\in C^3(\underline{\mathfrak{R}}_x-\{x_p;p=2,\cancel{p}-1\})$ (dovuta alle (2)), portano le $F(x_p)=F(x_{p+1})=0$ $F(x)\in C^0(\underline{\mathfrak{I}}_p)$ $F(x)\in C^1(x_p,x_{p+1})$. Ciò e la $Æ\langle F(x),x_p,x_{p+1}\ /f(x),a,b\ /(8)\rangle$ portano, intendendo la $\xi_p\in(x_p,x_{p+1})$, la

$$\epsilon_p''-\epsilon_{p+1}''+\Delta_p\cdot\epsilon^{(3)}(\xi_p)=0 \tag{9}$$

Si pongono le

$$\{p_A,p_B\}\subseteq\{p=1,\cancel{p}-1\}\ p_B>p_A\ \underline{J}\equiv\{J_p;p=1,\cancel{p}-1\}\ \underline{L}\equiv\{L_p;p=1,\cancel{p}-1\}\ \{J_p=0;\forall p\notin\{p=p_A,p_B\}\}\ \{J_p=\{1\circ\vee\circ 2\};\forall p\in\{p=p_A,p_B\}\}\ \{u,v\}\subseteq\{p=p_A,p_B\}\ \{L_p=0;\forall\{p\neq u\}\circ\vee\circ\{p\neq v\}\}\ L_u=1\ L_v=1 \tag{10}$$

La scrittura delle $A_p(t_p)=0$ $B_p(t_p)=0$ $C_p(t_p)=0$ $D_p(t_p)=0$ $E_p(t_p)=0$ (5) (6) (7) (9) per ognuno dei $\{p=1,\cancel{p}-1\}$, subordinata alle (10) nel senso che queste specificano come segue quelle che sono sostituite da altrettante quali la 0=0, dà luogo al sistema lineare omogeneo $\underline{M}\circ\underline{v}=\underline{0}_{\cancel{m}}$ (di cui la $\underline{0}\langle ş\rangle\equiv\{0;i=1,ş\}$) definito dalle $\underline{M}\equiv[\![M_{rc};r=1,\cancel{m};c=1,\cancel{n}]\!]$ $\cancel{m}\equiv 9\cdot(\cancel{p}-1)$ $\cancel{n}\equiv 14\cdot\cancel{p}-12$, dalla

$\underline{v}\equiv\{v_c;c=1,\cancel{n}\}=\{\{\epsilon(t_p);p=1,\cancel{p}-1\},\{\epsilon'(t_p);p=1,\cancel{p}-1\},\{\epsilon''(t_p);p=1,\cancel{p}-1\},\{\epsilon_p';p=1,\cancel{p}\},\{\epsilon_p'';p=1,\cancel{p}\},$
$\{\epsilon^{(3)}(\xi_p);p=1,\cancel{p}-1\},\underline{Q}\}$

di cui le $\xi_p\in(x_p,x_{p+1})$ $\underline{Q}\equiv\{\{Q_{qp};p=1,\cancel{p}-1\};q=1,8\}\}$ con Q_{qp} un q-esimo valore della $y^{(4)}(x)$ in (x_p,x_{p+1}), e dalla nullità di tutti gli elementi di $\underline{M}$ che non sono definiti dalle

$M\langle H\langle p,1\rangle,K\langle 2,0\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,1\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=\grave{\imath}_p(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,1\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=-\acute{\imath}_p(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,1\rangle,K\langle 4,2\rangle+p\rangle=-2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p(t_p)\cdot\grave{\imath}_p(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,2\rangle,K\langle 1,0\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,2\rangle,K\langle 3,0\rangle+p\rangle=-\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,2\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=2^{-1}\cdot(\grave{\imath}_p^2(t_p)-\Delta_p^2)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,2\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=-2^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^2(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,2\rangle,K\langle 5,2\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^2(t_p)\cdot(4^{-1}\cdot\Delta_p-6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p(t_p))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,3\rangle,p\rangle=\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,3\rangle,K\langle 3,0\rangle+p\rangle=-\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}\cdot\acute{\imath}_p(t_p)$
$M\langle H\langle p,3\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=6^{-1}\cdot(\acute{\imath}_p^3(t_p)-3\cdot\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^2(t_p))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,3\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=-6^{-1}\cdot\acute{\imath}_p^3(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,3\rangle,K\langle 6,2\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot\acute{\imath}_p^3(t_p)\cdot(12^{-1}\cdot\Delta_p-24^{-1}\cdot\acute{\imath}_p(t_p))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,4\rangle,K\langle 1,0\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,4\rangle,K\langle 3,0\rangle+p+1\rangle=-\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,4\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=2^{-1}\cdot\grave{\imath}_p^2(t_p)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,4\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=2^{-1}\cdot(\Delta_p^2-\acute{\imath}_p^2(t_p))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,4\rangle,K\langle 7,2\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot(4^{-1}\cdot\Delta_p\cdot í_p^2(t_p)-12^{-1}\cdot\Delta_p^3-6^{-1}\cdot í_p^3(t_p))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,5\rangle,p\rangle=\Delta_p\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,5\rangle,K\langle 3,0\rangle+p+1\rangle=-\Delta_p\cdot ì_p(t)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,5\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=6^{-1}\cdot ì_p^3(t)\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,5\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=6^{-1}\cdot(3\cdot\Delta_p^2\cdot ì_p(t)+\Delta_p^3-í_p^3(t))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,5\rangle,K\langle 8,2\rangle+p\rangle=\Delta_p\cdot(24^{-1}\cdot(\Delta_p^4-í_p^4(t))-12^{-1}\cdot\Delta_p\cdot(\Delta_p^2\cdot ì_p(t)-í_p^3(t)+\Delta_p^3))\cdot\delta_{1J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,6\rangle+6,K\langle 3,0\rangle+p\rangle=\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,6\rangle,K\langle 3,0\rangle+p+1\rangle=-\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,6\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,6\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=2^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,6\rangle,K\langle 9,2\rangle+p\rangle=-12^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,7\rangle,K\langle 3,0\rangle+p\rangle=\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,7\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=3^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,7\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=6^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,7\rangle,K\langle 10,2\rangle+p\rangle=-24^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,8\rangle,K\langle 3,0\rangle+p+1\rangle=\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,8\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=-6^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$
$M\langle H\langle p,8\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=-3^{-1}\cdot\Delta_p\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,8\rangle,K\langle 11,2\rangle+p\rangle=24^{-1}\cdot\Delta_p^3\cdot\delta_{2J\langle p\rangle}$

$M\langle H\langle p,9\rangle,K\langle 3,1\rangle+p\rangle=\delta_{1L\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,9\rangle,K\langle 3,1\rangle+p+1\rangle=-\delta_{1L\langle p\rangle}$ $M\langle H\langle p,9\rangle,K\langle 3,2\rangle+p\rangle=-\Delta_p\cdot\delta_{1L\langle p\rangle}$

di cui le $p\in\{p=1,\cancel{p}-1\}$ $H\langle a,b\rangle\equiv 9\cdot(a-1)+b$ e $K\langle a,b\rangle\equiv a\cdot(\cancel{p}-1)+b\cdot\cancel{p}$.

Dalla $\underline{\underline{M}}$ si ottiene una $\underline{\underline{N}}$ con il seguente algoritmo. Si pongono le $\underline{\underline{N}}\equiv[\![N_{rc};r=1,\cancel{m};c=1,\cancel{n}]\!]\equiv\underline{\underline{M}}$ $\{r_m;m=1,\cancel{m}\}=\{m=1,\cancel{m}\}$ $\{c_n;n=1,\cancel{n}\}=\{n=1,\cancel{n}\}$ $R=1$, e si intraprende l'esecuzione successiva dei seguenti passi:

1) se $R=K\langle 3,2\rangle+1$ si esegue il passo 7.

2) si pone la $P=\max\langle |N\langle r_m,c_n\rangle|;m=R,\cancel{m};n=R,K\langle 3,2\rangle\rangle$.

3) se è $P=0$ si esegue il passo 7.

4) si pone la $\{r,c\}=\{m,n\,|\,P=|N\langle r_m,c_n\rangle|\}$ e si scambiano i valori sia tra i $\{r_R,r_r\}$ sia tra i $\{c_R,c_c\}$.

5) si sostituiscono i $\{N\langle r_m,c_n\rangle;m=R+1,\cancel{m};n=R+1,\cancel{n}\}$ con i rispettivi $\{N\langle r_m,c_n\rangle-N\langle r_m,c_R\rangle\cdot N\langle r_R,c_n\rangle/N\langle r_R,c_R\rangle;m=R+1,\cancel{m};n=R,\cancel{n}\}$.

6) si incrementa R di 1 e si ricomincia con il passo 1.

7) si diminuisce R di 1 e si sostituiscono i $\{N\langle r_m,c_n\rangle;n=m,\cancel{n};m=1,R\}$ con i rispettivi $\{N\langle r_m,c_n\rangle/N\langle r_m,c_m\rangle;n=m,\cancel{n};m=1,R\}$.

8) si eseguono le iterazioni indicate dal $\{k=2,R\}$, e alla k-esima si sostituiscono i $\{N\langle r_m,c_n\rangle;m=1,k-1;n=k,\cancel{n}\}$ con i rispettivi $\{N\langle r_m,c_n\rangle-N\langle r_k,c_n\rangle\cdot N\langle r_m,c_k\rangle;m=1,k-1;n=k,\cancel{n}\}$.

La $\underline{\underline{N}}$ che si ha dopo questa esecuzione verifica ancora la $\underline{\underline{N}}\circ\underline{V}=\underline{0}_{\cancel{m}}$ (come quando è stata posta la $\underline{\underline{N}}\equiv\underline{\underline{M}}$) con il vantaggio che ognuna delle righe indicate dal $\{r_k;k=1,R\}$, di questo ulteriore sistema lineare omogeneo, dà luogo a una corrispondente

$$V_{c\langle k\rangle}=-\Sigma_{q=1,8}(\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(N\langle r_k,K\langle q+3,2\rangle+p\rangle\cdot Q_{qp}))-N\langle r_k,K\langle 3,2\rangle+u\rangle\cdot\epsilon^{(3)}(\xi_u)-N\langle r_k,K\langle 3,2\rangle+v\rangle\cdot\epsilon^{(3)}(\xi_v) \qquad (11)$$

di cui le

$V_{c\langle k\rangle}\in\{\{\epsilon(t_p);p=p_A,p_B\},\{\epsilon'(t_p);p=p_A,p_B\},\{\epsilon''(t_p);p=p_A,p_B\},\{\epsilon_p';p=p_A,p_B+1\},\{\epsilon_p'';p=p_A,p_B+1\}\}$
$\{\exists\{k\,|\,V_{c\langle k\rangle}\equiv\epsilon_p'\},\exists\{k\,|\,V_{c\langle k\rangle}\equiv\epsilon_p''\};p=p_A,p_B+1\}$.

Ciò, la (9) e la $p\in\{p=p_A,p_B+1\}$, portano la $\epsilon_p''=\alpha_p+\beta_{up}\cdot(\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u'')+\beta_{vp}\cdot(\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v'')$ di cui le $\alpha_p\equiv-\Sigma_{q=1,8}(\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(N\langle r_{a\langle p\rangle},K\langle q+3,2\rangle+p\rangle\cdot Q_{qp}))$ $\beta_{up}\equiv-\Delta_u^{-1}\cdot N\langle r_{a\langle p\rangle},K\langle 3,2\rangle+u\rangle$ $a_p\equiv\{k\,|\,c_k=K\langle 3,1\rangle+p\}$. Ciò porta la $\epsilon_{p+1}''-\epsilon_p''=\bar{\alpha}_p+\bar{\beta}_{up}\cdot(\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u'')+\bar{\beta}_{vp}\cdot(\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v'')$ di cui le $\bar{\alpha}_p\equiv\alpha_{p+1}-\alpha_p$ $\bar{\beta}_{up}\equiv\beta_{u,p+1}-\beta_{up}$, e che introducendovi la $p\equiv u$ o la $p\equiv v$ dà luogo alle rispettive $\tilde{\beta}_{uu}\cdot(\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u'')-\bar{\beta}_{vu}\cdot(\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v'')=\bar{\alpha}_u$ e $\bar{\beta}_{uv}\cdot(\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u'')-\tilde{\beta}_{vv}\cdot(\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v'')=-\bar{\alpha}_v$ di cui la $\tilde{\beta}_{uu}\equiv 1-\bar{\beta}_{uu}$. Risolvendo con il metodo di Cramer il sistema nelle incognite $\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u''$ e $\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v''$ costituito da queste due equazioni, si hanno le $\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u''=(\bar{\beta}_{vu}\cdot\bar{\alpha}_v+\tilde{\beta}_{vv}\cdot\bar{\alpha}_u)/\ominus_{uv}$ $\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v''=(\bar{\beta}_{uv}\cdot\bar{\alpha}_u+\tilde{\beta}_{uu}\cdot\bar{\alpha}_v)/\ominus_{uv}$ di cui la $\ominus_{uv}\equiv\tilde{\beta}_{vv}\cdot\tilde{\beta}_{uu}-\bar{\beta}_{vu}\cdot\bar{\beta}_{uv}$. Ciò e il verificare le $\bar{\beta}_{uu}=\bar{\beta}_{vv}=-1$ $\bar{\beta}_{uv}=\bar{\beta}_{vu}=0$ portano le $\epsilon_{u+1}''-\epsilon_u''=\bar{\alpha}_u/2$ $\epsilon_{v+1}''-\epsilon_v''=\bar{\alpha}_v/2$. Queste e la (9) portano le $\epsilon^{(3)}(\xi_u)=(2\cdot\Delta_u)^{-1}\cdot\alpha_u$ $\epsilon^{(3)}(\xi_v)=(2\cdot\Delta_v)^{-1}\cdot\alpha_v$. Introducendo queste e la $\alpha_p=\alpha_p(\underline{Q})$ nella (11), si ha la $\vee_{c\langle k\rangle}=-\Sigma_{q=1,8}(\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(\mathbb{N}_{kuvqp}\cdot Q_{qp}))$ di cui la

$\mathbb{N}_{kuvqp}\equiv N\langle r_k,K\langle q+3,2\rangle+p\rangle+(2\cdot\Delta_u)^{-1}\cdot N\langle r_k,K\langle 3,2\rangle+u\rangle\cdot(N\langle r_{a\langle u\rangle},K\langle q+3,2\rangle+p\rangle-$
$N\langle r_{a\langle u+1\rangle},K\langle q+3,2\rangle+p\rangle)+(2\cdot\Delta_v)^{-1}\cdot N\langle r_k,K\langle 3,2\rangle+v\rangle\cdot(N\langle r_{a\langle v\rangle},K\langle q+3,2\rangle+p\rangle-N\langle r_{a\langle v+1\rangle},K\langle q+3,2\rangle+p\rangle)$

e che dà luogo alla

$$|\vee_{c\langle k\rangle}|=|\Sigma_{q=1,8}(\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(\mathbb{N}_{kuvqp}\cdot Q_{qp}))|\leq\Sigma_{q=1,8}(\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(|\mathbb{N}_{kuvqp}|\cdot|Q_{qp}|))\leq \Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(\Sigma_{q=1,8}(|\mathbb{N}_{kuvqp}|)\cdot\Phi_p\langle y^{(4)}\rangle)\leq\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(\Sigma_{q=1,8}(|\mathbb{N}_{kuvqp}|))\cdot\Phi\langle y^{(4)}\rangle \qquad (12)$$

di cui le $\Phi_p\langle y^{(4)}\rangle\equiv\max\langle |y^{(4)}(x)| / x\in\underline{\mathfrak{R}}_{t\langle p\rangle}\rangle$ $\Phi\langle y^{(4)}\rangle\equiv\max\langle |y^{(4)}(x)| / x\in(x_1,x_{\cancel{p}})\rangle$.

Ogni diversa scelta dei p_A p_B $\underline{J}$ u v e $\{t_p;p=1,\cancel{p}-1\}$ dà luogo a una corrispondentemente diversa (12) che può eventualmente consentire una ulteriore minore limitazione superiore per alcuni dei $\{|\vee_c|;c=1,K\langle 3,2\rangle\}$. Perciò in particolare per i $\{|\epsilon_p'|;p=1,\cancel{p}\}$ è possibile procedere come segue. Si pongono le $\{\mathbb{K}_p\equiv\infty;p=1,\cancel{p}\}$ e si scelgono due naturali N_{IT} e $\cancel{N}_{IN}$ di cui la $\cancel{N}_{IN}\geq 2$. Si effettuano le iterazioni indicate dal $\{N_{IN}=2,\cancel{N}_{IN}\}$. Per ogni N_{IN}, se $\cancel{p}-N_{IN}\geq 1$, si effettuano le iterazioni indicate dal $\{p_A=1,\cancel{p}-N_{IN}\}$. Nella p_A–esima di queste iterazioni si pone $p_B=p_A+N_{IN}-1$ e si effettuano le iterazioni indicate dal $\{I_t=1,\mathcal{N}_{IT}\}$ di cui le $\{\mathcal{N}_{IT}>N_{IT};\forall\{p_A=1\}\dot{\vee}\{p_A=\cancel{p}-N_{IN}\}\}$ $\{\mathcal{N}_{IT}=N_{IT};\forall p_A\in\{p=2,\cancel{p}-N_{IN}-1\}\}$. Per ogni I_t, si scelgono dei $\{J_p,t_p;p=p_A,p_B\}$ e $\{u,v\}$ in conformità alle (10), si calcolano i corrispondenti $\{K_p;p=p_A,p_B+1\}$ ognuno per mezzo delle $K_p=\Sigma_{p=1,\cancel{p}-1}(\Sigma_{q=1,8}(|\mathbb{N}_{kuvqp}|))$ e $k\equiv\{k|c_k=K\langle 3,0\rangle+p\}$, e per ognuno dei $\{p=p_A,p_B+1\}$ si sostituisce $\mathbb{K}_p$ con K_p se $K_p<\mathbb{K}_p$. Dopo questi passi si ha la

$$\{|\epsilon_p'|\leq\mathbb{K}_p\cdot\Phi\langle y^{(4)}\rangle;p=1,\cancel{p}\} \qquad (13)$$

che generalmente migliora con l'aumento di $\cancel{N}_{IN}$ e (per l'evidente maggiore influenza su ϵ_p' di quelli dei $\{\underline{\mathfrak{I}}_p;p=1,\cancel{p}-1\}$ che gli sono più vicini) ancor più con l'aumento di N_{IT}.

2.2 *Una curva nello spazio euclideo multidimensionale. La derivata direzionale. Il massimo valore assoluto di una derivata definita su una curva.*

Un vettore (detto anche vettore libero) è un segmento rettilineo definito da una direzione (nel senso che può giacere su una qualsiasi retta elemento di un inerente insieme infinito di rette parallele), da un verso (nel senso che i suoi punti estremi sono distinti come sue origine e destinazione), e da una lunghezza (o modulo) che ne è la misura. Un vettore applicato in un punto è un vettore di cui se ne afferma tale punto come l'origine. Un versore è un vettore che ha modulo unitario.

Per un vettore $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}|$ (di cui la $x\equiv|\mathbf{x}|$) e $\boldsymbol{\upsilon}\langle\mathbf{x}\rangle$ indicano rispettivamente il modulo e il versore di $\mathbf{x}$ ($\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{x}$ è il vettore che ha stessi direzione e verso di $\mathbf{x}$ ma modulo unitario). Il prodotto $a\cdot\mathbf{x}$, tra il reale a e $\mathbf{x}$, ha la stessa direzione di $\mathbf{x}$, lo stesso verso di $\mathbf{x}$ se $a>0$ o verso opposto a quello di $\mathbf{x}$ se $a<0$, e modulo di cui la $|a\cdot\mathbf{x}|=|a|\cdot|\mathbf{x}|$; seguendo da ciò la $\mathbf{x}=x\cdot\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{x}$. Il prodotto scalare $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ tra i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è definito dalla $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\equiv|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot\cos\langle\alpha_{\mathbf{AB}}\rangle$, dove $\alpha_{\mathbf{AB}}$ è l'angolo compreso tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quando sono specificati come vettori applicati in uno stesso punto (nel senso $\alpha_{\mathbf{AB}}$ è minore di un angolo piatto).

Si fa riferimento alla sez. 2.4.1 di [1]. Uno spazio euclideo $\mathbb{S}^{\cancel{n}}$ a $\cancel{n}$ dimensioni, chiamato anche $\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}}$ di cui le $\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}}=\Pi_{n=1,\cancel{n}}(\underline{\mathfrak{R}}^1)$ e $\underline{\mathfrak{R}}^1\equiv(-\infty,\infty)$, è munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, che ha le coordinate $\underline{x}$ (di cui la $\underline{x}\equiv\{x_n;n=1,\cancel{n}\}$ e misurate sui rispettivi assi coordinati) e i versori coordinati $\underline{\boldsymbol{\upsilon}}$ (di cui la $\underline{\boldsymbol{\upsilon}}\equiv\{\boldsymbol{\upsilon}_n;n=1,\cancel{n}\}$ e che hanno ognuno la direzione e il verso del rispettivo asse coordinato). Una $\mathbf{x}\equiv\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(x_n\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n)$ definisce $\mathbf{x}$ come un vettore di $\mathbb{S}^{\cancel{n}}$ e che ha le componenti $\underline{x}$. Si hanno le $\boldsymbol{\upsilon}_n\cdot\boldsymbol{\upsilon}_{\mathcal{n}}=\delta_{n\mathcal{n}}$ $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_\mathbf{x}=x$ $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=x^2=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(x_n\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n)\cdot\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(x_n\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n)=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(\Sigma_{\mathcal{n}=1,\cancel{n}}(x_n\cdot x_{\mathcal{n}}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n\cdot\boldsymbol{\upsilon}_{\mathcal{n}}))=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(x_n^2)$ (la cui $x^2=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(x_n^2)$ generalizza il teorema di Pitagora).

Si pongono le $\{\underline{\mathsf{C}}\Leftrightarrow[\text{ɵ},\text{ɇ}]\}\subseteq\{\mathbb{S}^1\Leftrightarrow\mathfrak{R}^1\}$ e $\underline{\mathsf{C}}\subset\mathbb{S}^{\not{n}}$. Queste definiscono $\underline{\mathsf{C}}$ come una curva giacente in $\mathbb{S}^{\not{n}}$ e che non interseca se stessa. Una tale $\underline{\mathsf{C}}$ è individuata dalle proprie funzioni parametriche $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$ (di cui $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})\equiv\{\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c});\mathrm{n}=1,\not{n}\}$) definite nel $\mathfrak{R}\langle\mathsf{c}\rangle$ (di cui $\mathfrak{R}_{\mathsf{c}}\equiv[\text{ɵ},\text{ɇ}]$) e che ne costituiscono le omonime equazioni $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}=\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$ di cui $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}\equiv\{\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}};\mathrm{n}=1,\not{n}\}\in\underline{\mathsf{C}}$, essendo c l'ascissa curvilinea misurata su $\underline{\mathsf{C}}$ nel senso che $\mathsf{c}-\text{ɵ}$ è la lunghezza del tratto di $\underline{\mathsf{C}}$ che ha per estremi i punti $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\text{ɵ})$ e $\underline{\text{ж}}(\mathsf{c})$.

Il versore $\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}$, tangente a $\underline{\mathsf{C}}$ nel punto $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$, è espresso dalla $\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}=\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})\equiv\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\cdot\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{n}})$ di cui la $\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})=\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}'(\mathsf{c})$ con $\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})$ il n-esimo coseno direttore della retta tangente a $\underline{\mathsf{C}}$ in $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$ e orientata concordemente alla c crescente.

Una $\underline{\mathsf{C}}$ è regolare se $\{\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\in\mathsf{C}^1(\mathfrak{R}_{\mathsf{c}});\mathrm{n}=1,\not{n}\}$ e quindi, nell'aspetto grafico, se (oltre ad essere continua) è priva di punti angolosi o cuspidi dove la funzione $\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$ avrebbe un salto.

Per una $\underline{\mathsf{C}}$ regolare si ha la relazione differenziale, di natura geometrica e conforme al teorema di Pitagora, costituita dalla $\mathrm{d}\mathsf{c}^2=\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}((\mathrm{d}\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}))^2)$ che divisa per $\mathrm{d}\mathsf{c}$ (e considerando la $\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})=\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}'(\mathsf{c})$) diviene la $\mathrm{d}\mathsf{c}=\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\cdot\mathrm{d}\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}))$ che divisa a sua volta per $\mathrm{d}\mathsf{c}$ diviene la $\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^2(\mathsf{c}))=1$.

Il gradiente $\nabla\langle f(\underline{\mathrm{x}})\rangle$ di una $f(\underline{\mathrm{x}})$ è definito dalla $\nabla_{f(\underline{\mathrm{x}})}\equiv\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}((\partial f(\underline{\mathrm{x}})/\partial\mathrm{x}_{\mathrm{n}})\cdot\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{n}})$. Si pone la $\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})\equiv f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))$. Da: questa; le note regole di derivazione di una funzione composta, e la $\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})=\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}'(\mathsf{c})$; segue

$$\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}'(\mathsf{c})=\mathrm{d}f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))/\mathrm{d}\mathsf{c}=\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}((\partial f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))/\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}})\cdot\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}))=\nabla\langle f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))\rangle\cdot\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}) \tag{1}$$

dove $\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}'(\mathsf{c})$ è la derivata direzionale della $f(\underline{\mathrm{x}})$ nel punto $\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})$ secondo la direzione e il verso di $\boldsymbol{\tau}_{\underline{\mathsf{C}}}$, e di cui la $\{\partial f(\underline{\mathrm{x}})/\partial\mathrm{x}_{\mathrm{n}}=\partial f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))/\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}};\forall\,\underline{\mathrm{x}}=\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c})\}$.

La derivata h-esima del prodotto di due funzioni $f(\mathrm{x})$ e $g(\mathrm{x})$ è espressa dalla formula di Leibnitz

$$(f(\mathrm{x})\cdot g(\mathrm{x}))^{(\mathrm{h})}=\Sigma_{\mathrm{k}=0,\mathrm{h}}(\text{Б}\langle\mathrm{h},\mathrm{k}\rangle\cdot f^{(\mathrm{h}-\mathrm{k})}(\mathrm{x})\cdot g^{(\mathrm{k})}(\mathrm{x})) \tag{2}$$

di cui la $\text{Б}\langle\mathrm{N},\mathrm{K}\rangle\equiv\mathrm{N}!/((\mathrm{N}-\mathrm{K})!\cdot\mathrm{K}!)=\Pi_{\mathrm{i}=\mathrm{N}-\mathrm{K}+1,\mathrm{N}}(\mathrm{i})/\mathrm{K}!$.

Il simbolo "…" generalmente sottintende altri simboli ritenuti evidenti, e in particolare quando è inserito in una successione indica che questa è costituita da elementi che variano dal primo all'ultimo ordinatamente con l'andamento successivo indicato dai primi due (e avendo quindi in tale senso le $\{\text{ş}_1,\text{ş}_2,\ldots,\text{ş}_{\mathrm{k}}\,|\,\mathrm{k}=1\}\equiv\text{ş}_1$ $\{\text{ş}_1,\text{ş}_2,\ldots,\text{ş}_{\mathrm{k}}\,|\,\mathrm{k}=2\}\equiv\{\text{ş}_1,\text{ş}_2\}$).

Si pongono le $o\geq1$ $\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\{\mathrm{n}\langle\mathrm{i}\rangle;\mathrm{i}=1,\mathrm{a}\}}(\mathsf{c})\equiv\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle1\rangle\mathrm{n}\langle2\rangle\ldots\mathrm{n}\langle\mathrm{a}\rangle}(\mathsf{c})\equiv\partial f^{\mathrm{a}}(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))/\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle1\rangle}\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle2\rangle}\ldots\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle\mathrm{a}\rangle}$ (da cui segue in particolare la $\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\equiv\partial f(\underline{\text{ж}}_{\underline{\mathsf{C}}}(\mathsf{c}))/\partial\text{ж}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}$). Da: $o\geq1$; (1); þ; $\text{Æ}\langle\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}),\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}),o-1\,/\,f(\mathrm{x}),g(\mathrm{x}),\mathrm{h}\,/\,(2)\rangle$; segue

$$\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}{}^{(o)}(\mathsf{c})=(\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}'(\mathsf{c}))^{(o-1)}=(\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\cdot\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})))^{(o-1)}=\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}((\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\cdot\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c}))^{(o-1)})=$$
$$\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\Sigma_{\mathrm{k}=0,o-1}(\text{Б}_{o-1,\mathrm{k}}\cdot\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-\mathrm{k}-1)}(\mathsf{c})\cdot\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(\mathrm{k})}(\mathsf{c}))) \tag{3}$$

che dà luogo alla

$$|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}{}^{(o)}(\mathsf{c})|\leq\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\Sigma_{\mathrm{k}=0,o-1}(\text{Б}_{o-1,\mathrm{k}}\cdot|\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-\mathrm{k}-1)}(\mathsf{c})|\cdot|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(\mathrm{k})}(\mathsf{c})|))\leq\Psi_o(\mathsf{c})\cdot\boldsymbol{\Phi}_o(\mathsf{c}) \tag{4}$$

di cui le $\Psi_o(\mathsf{c})\equiv\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\Sigma_{\mathrm{k}=0,o-1}(\text{Б}_{o-1,\mathrm{k}}\cdot|\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-\mathrm{k}-1)}(\mathsf{c})|))$ $\boldsymbol{\Phi}_o(\mathsf{c})\equiv\max\langle|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(\mathrm{k})}(\mathsf{c})|;\mathrm{k}=0,o-1;\mathrm{n}=1,\not{n}\rangle$.

Si pone la $\mathcal{P}_\tau\equiv\{\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\equiv\mathrm{T}_{\mathrm{n}};\mathrm{n}=1,\not{n}\}$ per cui si ha la $\mathcal{P}_\tau$ se i $\{\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}};\mathrm{n}=1,\not{n}\}$ sono costanti come accade quando la curva $\underline{\mathsf{C}}$ è un segmento di retta. Da: $\mathcal{P}_\tau$, e i membri primo e quarto della (3); segue IPM

$$\{|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}{}^{(o)}(\mathsf{c})|=|\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})\cdot\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-1)}(\mathsf{c}))|\leq\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})|\cdot|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-1)}(\mathsf{c})|)\leq$$
$$\Psi_{\mathrm{R}}(\mathsf{c})\cdot|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle o\rangle}{}^{(o-1)}(\mathsf{c})|\}\underline{\leftarrow}\mathcal{P}_\tau \tag{5}$$

di cui le $\Psi_{\mathrm{R}}(\mathsf{c})\equiv\Sigma_{\mathrm{n}=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}(\mathsf{c})|)$ e $|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle o\rangle}{}^{(o-1)}(\mathsf{c})|\equiv\max\langle|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}}{}^{(o-1)}(\mathsf{c})|;\mathrm{n}=1,\not{n}\rangle$.

Le $\Psi_{\mathrm{R}}(\mathsf{c})\leq\Psi_o(\mathsf{c})$ $|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}\mathrm{n}\langle o\rangle}{}^{(o-1)}(\mathsf{c})|\leq\boldsymbol{\Phi}_o(\mathsf{c})$ (4) e (5) mostrano come la $\mathcal{P}_\tau$ porti una limitazione superiore di $|\not{f}_{\underline{\mathsf{C}}}{}^{(o)}(\mathsf{c})|$ (ossia il massimo valore assoluto di una derivata definita su una curva) generalmente minore di quella implicata dalla $\neg\mathcal{P}_\tau$.

Da: $\mathcal{P}_\tau$ e (3); $\mathcal{P}_\tau$ e $Æ\langle \not{f}_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C),o-1 \,/\, \not{f}_{\underline{C}}^{(o)}(C),o \,/(3)\rangle$;…; segue IPM

$$\{\not{f}_{\underline{C}}^{(o)}(C)=\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)\cdot\not{f}_{\underline{C}n\langle 1\rangle}^{(o-1)}(C))=\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle 2\rangle}(C)\cdot\not{f}_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle}^{(o-2)}(C)))=\ldots=$$
$$\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(\ldots\Sigma_{n\langle o\rangle=1,\not{n}}(\Theta_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C))\ldots))\}\underline{\leftarrow}\mathcal{P}_\tau \qquad (6)$$

di cui la $\Theta_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C)\equiv\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle 2\rangle}(C)\cdot\ldots\tau_{\underline{C}n\langle o\rangle}(C)\cdot\not{f}_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C)$.

La numerosità dell'insieme di tutte le disposizioni con ripetizione di classe K di N oggetti è N^K. Un $m\langle c,b,a\rangle$ è il a-esimo elemento della b-esima disposizione con ripetizione di classe c dei $\{m=\not{m},\not{m}\}$. Si ha la

$$\Sigma_{m\langle 1\rangle=\not{m},\not{m}}(\Sigma_{m\langle 2\rangle=\not{m},\not{m}}(\ldots\Sigma_{m\langle K\rangle=\not{m},\not{m}}(G_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle K\rangle})\ldots))=\Sigma_{b=1,(\not{m}-\not{m}+1)^K}(G_{\{m\langle K,b,a\rangle;a=1,K\}}) \qquad (7)$$

La $Æ\langle\{n=1,\not{n}\},o,\Theta_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C)\,/\,\{m=\not{m},\not{m}\},K,G_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle K\rangle}\,/(7)\rangle$ porta la

$$\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(\ldots\Sigma_{n\langle o\rangle=1,\not{n}}(\Theta_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C))\ldots))=\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(\Theta_{\underline{C}\{n\langle o,b,a\rangle;a=1,o\}}(C)) \qquad (8)$$

dove n_{oba} è il a-esimo elemento della b-esima disposizione con ripetizione di classe o dei $\{n=1,\not{n}\}$.

Da: $\mathcal{P}_\tau$ (6) e (8); l'espressione di $\Theta_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle}(C)$; segue IPM

$$\{\,|\not{f}_{\underline{C}}^{(o)}(C)|=|\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(\Theta_{\underline{C}\{n\langle o,b,a\rangle;a=1,o\}}(C))|=$$
$$|\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(\tau_{\underline{C}n\langle o,b,1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle o,b,2\rangle}(C)\cdot\ldots\tau_{\underline{C}n\langle o,b,o\rangle}(C)\cdot\not{f}_{\underline{C}n\langle o,b,1\rangle n\langle o,b,2\rangle\ldots n\langle o,b,o\rangle}(C))|\le$$
$$\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(|\tau_{\underline{C}n\langle o,b,1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle o,b,2\rangle}(C)\cdot\ldots\tau_{\underline{C}n\langle o,b,o\rangle}(C)|\cdot|\not{f}_{\underline{C}n\langle o,b,1\rangle n\langle o,b,2\rangle\ldots n\langle o,b,o\rangle}(C)|)\le\Psi_{Ro}(C)\cdot\not{\Phi}_{Ro}(C)\}\underline{\leftarrow}\mathcal{P}_\tau \qquad (9)$$

di cui le $\Psi_{Ro}(C)\equiv\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(\mathit{\Theta}_{\underline{C}\{n\langle o,b,a\rangle;a=1,o\}})$ $\mathit{\Theta}_{\underline{C}\{n\langle a\rangle;a=1,o\}}\equiv|\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle 2\rangle}(C)\cdot\ldots\tau_{\underline{C}n\langle o\rangle}(C)|$ $\not{\Phi}_{Ro}(C)\equiv$ $\max\langle|\partial f^o(\underline{Ж}_{\underline{C}}(C))/\partial Ж_{\underline{C}n\langle 1\rangle}\partial Ж_{\underline{C}n\langle 2\rangle}\ldots\partial Ж_{\underline{C}n\langle o\rangle}|\,/\,\{n_a\in\{n=1,\not{n}\};a=1,o\}\rangle$.

Per la $|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle}^{(o-1)}(C)|$ della (5) si ha la $Æ\langle o-1,\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle}\,/\,o,\not{f}_{\underline{C}}\,/(5)\rangle$ che porta la $\mathcal{P}_\tau\underline{\rightarrow}$ $\{\,|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle}^{(o-1)}(C)|\le\Psi_R(C)\cdot|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle}^{(o-2)}(C)|\}$ di cui la $|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle}^{(o-2)}(C)|\equiv\max\langle|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n}^{(o-2)}(C)|;$ $n=1,\not{n}\rangle$. Ciò la $\mathcal{P}_\tau$ e la (5) portano la $|\not{f}_{\underline{C}}^{(o)}(C)|\le\Psi_R^2(C)\cdot|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle}^{(o-2)}(C)|$, e diminuendo successivamente allo stesso modo fino a 0 l'ordine di derivazione del secondo membro, si perviene alla prima limitazione della

$$\{\,|\not{f}_{\underline{C}}^{(o)}(C)|\le\Psi_R^o(C)\cdot|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle\ldots n\langle 1\rangle}(C)|\le\Psi_R^o(C)\cdot\not{\Phi}_{Ro}(C)\}\underline{\leftarrow}\mathcal{P}_\tau \qquad (10)$$

di cui la $|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle\ldots n\langle 1\rangle}(C)|\equiv\max\langle|\not{f}_{\underline{C}n\langle o\rangle n\langle o-1\rangle\ldots n}(C)|;n=1,\not{n}\rangle$.

Il confronto tra le (9) e (10) mostra la $\Psi_{Ro}(C)=\Psi_R^o(C)$ che può essere confermata come segue. Da: definizione di $\Psi_{Ro}(C)$; $Æ\langle\{n=1,\not{n}\},o,\mathit{\Theta}_{\underline{C}\{n\langle o,b,a\rangle;a=1,o\}}\,/\,\{m=\not{m},\not{m}\},K,G_{\{m\langle K,b,a\rangle;a=1,K\}}\,/(7)\rangle$; definizione di $\mathit{\Theta}_{\underline{C}\{n\langle a\rangle;a=1,o\}}$; þ; þ; definizione di $\Psi_R(C)$; segue

$$\Psi_{Ro}(C)\equiv\Sigma_{b=1,\not{n}^o}(\mathit{\Theta}_{\underline{C}\{n\langle o,b,a\rangle;a=1,o\}})=\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(\ldots\Sigma_{n\langle o\rangle=1,\not{n}}(\mathit{\Theta}_{\underline{C}n\langle 1\rangle n\langle 2\rangle\ldots n\langle o\rangle})\ldots))=$$
$$\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(\ldots\Sigma_{n\langle o\rangle=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)\cdot\tau_{\underline{C}n\langle 2\rangle}(C)\cdot\ldots\tau_{\underline{C}n\langle o\rangle}(C)|)\ldots))=$$
$$\Sigma_{n\langle 1\rangle=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{C}n\langle 1\rangle}(C)|\cdot\Sigma_{n\langle 2\rangle=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{C}n\langle 2\rangle}(C)|\cdot\ldots\Sigma_{n\langle o\rangle=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{C}n\langle o\rangle}(C)|)\ldots))=(\Sigma_{n=1,\not{n}}(|\tau_{\underline{C}n}(C)|))^o=\Psi_R^o(C)$$

2.3 *L'approssimazione di una combinazione lineare di derivate direzionali che esprime una derivata parziale in un punto intersezione di più curve.*

Si considera l'insieme di curve $\{\underline{C}_c;c=1,\not{e}\}$ di cui le $\not{e}\ge\not{n}$ $\{Æ\langle\underline{C}_c,C_c,\underline{Ж}_c,Ж_{cn},\not{C}_c,\not{C}_c\,/\,\underline{C},C,\underline{Ж}_{\underline{C}},Ж_{\underline{C}n},\not{C},\not{C}\,/$ $(2.2.1)\rangle,\underline{x}=\underline{Ж}_c(\mathbb{C}_c);c=1,\not{e}\}$ $C_{c1}=\not{C}_c=0$ $C_{c\not{i}\langle c\rangle}=\not{C}_c$ $\{C_{c,i-1}<C_c;i=2,\not{i}_c\}$ $\mathbb{C}_c\equiv C_{ci\langle c\rangle}$ $i_c\in\{i=1,\not{i}_c\}$.

Ciò dà luogo al sistema lineare $\underline{T}\circ\underline{D}=\underline{F}$ di cui le $\underline{T}\equiv[\![\tau_{cn};c=1,\not{e};n=1,\not{n}]\!]$ $\tau_{cn}=Ж_{cn}'(\mathbb{C}_c)$ $\underline{D}\equiv\{\partial f(\underline{x})/\partial x_n;$ $n=1,\not{n}\}$ $\{\partial f(\underline{x})/\partial x_n=\partial f(\underline{Ж}_c(\mathbb{C}_c))/\partial Ж_{cn};c=1,\not{e}\}$ $\underline{F}\equiv\{F_c;c=1,\not{e}\}$ $F_c=\not{f}_c'(\mathbb{C}_c)$ $\not{f}_c(C_c)\equiv f(\underline{Ж}_c(C_c))$.

Si considera la $\{c_{nb};n=1,\not{n};b=1,\not{b}\}$ che verifica la $\{\det\langle\underline{T}_b\rangle\ne0;b=1,\not{b}\}$ di cui la $\underline{T}_b\equiv[\![\tau_{c\langle n,b\rangle n};n=1,\not{n};n=1,\not{n}]\!]$. Ciò e la $Æ\langle\underline{T}\circ\underline{D}=\underline{F}\,/\,\underline{A}\circ\underline{x}=\underline{B}\,/(2.3.4)$ di [1]$\rangle$ portano la $\{\underline{D}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_b;b=1,\not{b}\}$ di cui le $\underline{T}_b^{-1}\equiv[\![\mathcal{T}_{bnn};n=1,\not{n};$ $n=1,\not{n}]\!]$ $\underline{F}_b\equiv\{F_{c\langle n,b\rangle};n=1,\not{n}\}$ e che dà luogo alla $\{\underline{D}_{Ab}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_{Ab};b=1,\not{b}\}$ di cui le $\underline{D}_{Ab}\equiv\{-D_{Abn};n=1,\not{n}\}$ $\underline{F}_{Ab}\equiv\{-F_{Ac\langle n,b\rangle};n=1,\not{n}\}$. Le $\underline{D}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_b$ e $\underline{D}_{Ab}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_{Ab}$ portano la $\underline{D}+\underline{D}_{Ab}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_b+\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_{Ab}$ da cui segue la $\underline{\epsilon}_b=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{\epsilon}_b$ di cui le $\underline{\epsilon}_b\equiv\underline{D}+\underline{D}_{Ab}\equiv\{\epsilon_{bn};n=1,\not{n}\}$ $\epsilon_{bn}=\partial f(\underline{x})/\partial x_n-D_{Abn}$ $\underline{\epsilon}_b\equiv\underline{F}_b+\underline{F}_{Ab}\equiv\{\epsilon_{c\langle n,b\rangle};n=1,\not{n}\}$ $\epsilon_c=F_c-F_{Ac}$.

Si considera ogni F_{Ac} come una approssimazione nota dell'incognito F_c, seguendone (per le $\underline{D}_{Ab}= \underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_{Ab}$ e $\underline{D}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_b$) che ogni D_{Abn} è una approssimazione nota dell'incognito $\partial f(\underline{x})/\partial x_n$, e quindi che i $\epsilon_{c\langle n,b\rangle}$ e ϵ_{bn} sono gli errori delle rispettive approssimazioni del $F_{c\langle n,b\rangle}$ con il $F_{Ac\langle n,b\rangle}$ e del $\partial f(\underline{x})/\partial x_n$ con il D_{Abn}.

La $Æ\langle c_{ci},\not f_c(c_{ci});i=1,\cancel{i}_c\,/x_p,y(x_p);p=1,\cancel{p}\,/(2.1.2.10)\rangle$ consente di porre la

$$F_{Ac}=\Sigma_{i=1,\cancel{i}\langle c\rangle}(\lambda_{ci}\cdot\not f_c(c_{ci})) \tag{1}$$

i cui $\{\lambda_{ci};i=1,\cancel{i}_c\}$ sono conoscibili per mezzo delle

$Æ\langle\mathbb{C}_c,\{c_{ci};i=1,\cancel{i}_c\}\,/x_p,\{x_p;p=1,\cancel{p}\}\,/(2.1.2.10)\rangle$ $\{Æ\langle\lambda_{ci};i=1,\cancel{i}_c\,/\lambda_{pp};p=1,\cancel{p}\,/(2.1.2.10)\rangle;\forall i_c<\cancel{i}_c\}$ $\{Æ\langle\lambda_{ci};i=1,\cancel{i}_c\,/\lambda_p;p=1,\cancel{p}\,/(2.1.2.10)\rangle;\forall i_c\equiv\cancel{i}_c\}$

La $Æ\langle F_c,F_{Ac},-\epsilon_c\,/y'(x_p),\mathbb{S}'(x_p),\epsilon_p'\,/\text{sez. } 2.1.2\rangle$ (dovuta a (1) e $\epsilon_c=F_c-F_{Ac}$) porta la $|\epsilon_c|\le\mathbb{K}_c\cdot\varphi_c$ il cui $\mathbb{K}_c$ è conoscibile per mezzo della $Æ\langle-\epsilon_c,\mathbb{K}_c,\varphi_c\,/\epsilon_p',\mathbb{K}_p,\Phi\langle y^{(4)}\rangle\,/(2.1.2.1.13)\rangle$ e di cui la $\varphi_c\equiv \max\langle|\not f_c^{(4)}(c)|\,/c\in(0,\cancel{c}_c)\rangle$. Questa e la $Æ\langle\not f_c(c_c),4\,/\not f_{\underline{c}}(c),o\,/(2.2.4),(2.2.10)\rangle$ consentono di porre la $\varphi_c=\psi_c\cdot\varphi_c$ il cui ψ_c è noto. Perciò si ha la $|\epsilon_c|\le\psi_c\cdot\varphi_c$ di cui la $\psi_c\equiv\mathbb{K}_c\cdot\psi_c$ e con ψ_c noto.

La $\underline{\epsilon}_b=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{\epsilon}_b$ ha l'espressione $\{\epsilon_{bn}=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{bnn}\cdot\epsilon_{c\langle n,b\rangle});n=1,\cancel{n}\}$ che, in base alla $|\epsilon_c|\le\psi_c\cdot\varphi_c$, dà luogo alla $\{|\epsilon_{bn}|\le\psi_{bn}\cdot\cancel{\varphi};n=1,\cancel{n}\}$ di cui la $\cancel{\varphi}\equiv\max\langle\varphi_c;c=1,\cancel{c}\rangle$ e il cui ψ_{bn} è reso noto dalla $\psi_{bn}\equiv \Sigma_{n=1,\cancel{n}}(|T_{bnn}|\cdot\psi_{c\langle n,b\rangle})$. Queste limitazioni portano che il più conveniente tra gli alternativi $\{\epsilon_{bn}; b=1,\cancel{b}\}$ è il $\epsilon_{\mathbb{B}n}$ di cui la $\mathbb{B}\equiv\{b\,|\,\psi_{bn}=\min\langle\psi_{bn};b=1,\cancel{b}\rangle\}$. Da: ciò e la $\epsilon_{bn}\equiv\partial f(\underline{x})/\partial x_n-D_{Abn}$; $D_{Abn}= \Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{bnn}\cdot F_{Ac\langle n,b\rangle})$ (dovuta a $\underline{D}_{Ab}=\underline{T}_b^{-1}\circ\underline{F}_{Ab}$); (1); $\not f_c(c_c)\equiv f(\mathfrak{X}_c(c_c))$; segue

$$\partial f(\underline{x})/\partial x_n=D_{A\mathbb{B}n}+\epsilon_{\mathbb{B}n}=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{\mathbb{B}nn}\cdot F_{Ac\langle n,\mathbb{B}\rangle})+\epsilon_{\mathbb{B}n}=\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{\mathbb{B}nn}\cdot\Sigma_{i=1,\cancel{i}\langle c\langle n,\mathbb{B}\rangle\rangle}(\lambda_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i}\cdot\not f_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle}(c_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i})))+\epsilon_{\mathbb{B}n}= \Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{\mathbb{B}nn}\cdot\Sigma_{i=1,\cancel{i}\langle c\langle n,\mathbb{B}\rangle\rangle}(\lambda_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i}\cdot f(\mathfrak{X}_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle}(c_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i}))))+\epsilon_{\mathbb{B}n}$$

che, ammettendo la $\epsilon_{\mathbb{B}n}\cong0$, dà luogo alla

$$\partial f(\underline{x})/\partial x_n\cong\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(\Sigma_{i=1,\cancel{i}\langle c\langle n,\mathbb{B}\rangle\rangle}(T_{\mathbb{B}nn}\cdot\lambda_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i}\cdot\not f_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle}(c_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle i}))) \tag{2}$$

come una approssimazione della combinazione lineare di derivate direzionali $\Sigma_{n=1,\cancel{n}}(T_{\mathbb{B}nn}\cdot F_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle})$, che (in base alla $\underline{D}=\underline{T}_{\mathbb{B}}^{-1}\circ\underline{F}_{\mathbb{B}}$) esprime il $\partial f(\underline{x})/\partial x_n$ nel punto $\underline{x}$ di cui la $\{\underline{x}=\mathfrak{X}_c(\mathbb{C}_c);c=1,\cancel{c}\}$.

3 La formulazione di un modello analitico differenziale e la sua soluzione numerica come le incognite di un sistema totale.

Il generico modello analitico differenziale $\mathfrak{M}$ (detto in sez. 1) ha un'espressione $\mathfrak{M}\langle\underline{x}\rangle$ di cui le

$\mathfrak{M}\langle\underline{x}\rangle\equiv\{E_m(\underline{F}_m(\underline{x}),\underline{D}_m(\underline{x}),\underline{F}_{Nm}(\underline{x}))=0;m=1,\cancel{m}\}$ $\underline{F}_m(\underline{x})\subseteq\underline{F}(\underline{x})$ $\underline{D}_m(\underline{x})\subseteq\underline{D}(\underline{x})$ $\underline{F}_{Nm}(\underline{x})\subseteq\underline{F}_N(\underline{x})$

$\underline{F}(\underline{x})\equiv\{F_m(\underline{x});m=1,\cancel{m}\}$ $\underline{D}(\underline{x})\equiv\{D_d(\underline{x});d=1,\cancel{D}\}$ $\underline{F}_N(\underline{x})\equiv\{F_{Nm}(\underline{x});m=\cancel{m}+1,\cancel{M}\}$

$D_d(\underline{x})\equiv\partial^{\cancel{o}\langle d\rangle}F_{m\langle d\rangle}(\underline{x})/\partial x_{n\langle d,1\rangle}\partial x_{n\langle d,2\rangle}\ldots\partial x_{n\langle d,\cancel{o}\langle d\rangle\rangle}$ $\cancel{o}_d>0$ $m_d\in\{m=1,\cancel{m}\}$

$\underline{F}_d(\underline{x})\equiv\{F_{do}(\underline{x});o=0,\cancel{o}_d\}$ $F_{d0}(\underline{x})\equiv F_{m\langle d\rangle}(\underline{x})$ $F_{d\cancel{o}\langle d\rangle}(\underline{x})\equiv D_d(\underline{x})$

$$\{F_{do}(\underline{x})\equiv\partial F_{d,o-1}(\underline{x})/\partial x_{n\langle d,o\rangle}\equiv\partial^{o}F_{m\langle d\rangle}(\underline{x})/\partial x_{n\langle d,1\rangle}\partial x_{n\langle d,2\rangle}\ldots\partial x_{n\langle d,o\rangle};o=1,\cancel{o}_d\} \tag{1}$$

dove: ogni $\{n_{do};o=1,o\}$ (di cui $1\le o\le\cancel{o}_d$) è una combinazione generalmente con ripetizione di classe o dei $\{n=1,\cancel{n}\}$, nel senso che è sostituibile da una sua permutazione come consente l'invertibilità dell'ordine di derivazione ammessa dal teorema di Schwarz (di cui nei [11] [8]); le $\underline{F}_N(\underline{x})$ compaiono in $\mathfrak{M}_{\underline{x}}$ e se ne sottintendono noti i valori nei punti di $\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle$ dove si desidera conoscere i $\underline{F}(\underline{x})$; le $\underline{D}(\underline{x})$ compaiono in $\mathfrak{M}_{\underline{x}}$ come incognite a meno della loro detta identificazione come derivate parziali; le $\underline{F}(\underline{x})$ sono incognite e compaiono in $\mathfrak{M}_{\underline{x}}$ autonomamente o come funzioni derivande nelle $\underline{D}(\underline{x})$; $\underline{x}$ è arbitrario a meno della $\underline{x}\in\mathfrak{R}_{\underline{x}}$.

La conoscenza dei $\underline{F}(\underline{x})$ può considerarsi impedita dal non conoscere le $\underline{D}(\underline{x})$, nel senso che, se queste fossero funzioni note delle $\underline{F}(\underline{x})$, $\underline{\mathfrak{M}}$ diverrebbe risolvibile come un sistema di $\cancel{m}$ equazioni non differenziali nelle altrettante incognite costituite dai $\underline{F}(\underline{x})$. Perciò una risoluzione, numerica come si sottintende nel seguito, di $\underline{\mathfrak{M}}$ può avvenire eliminando questo ostacolo per mezzo dell'approssimarne valori delle $\underline{D}(\underline{x})$ con funzioni note di valori delle $\underline{F}(\underline{x})$.

Una soluzione numerica di $\underline{\mathfrak{M}}$ è un insieme di numeri chiamato $\underline{\mathfrak{S}}$ e di cui le $\underline{\mathfrak{S}}\equiv\{\mathfrak{f}_{mp};m=1,\cancel{m};p=1,\cancel{P}\}$ $\mathfrak{f}_{mp}\cong F_m(\underline{x}_p)$ $\underline{\mathfrak{X}}\equiv\{\underline{x}_p;p=1,\cancel{P}\}\subset\underline{\mathfrak{R}}_{\underline{x}}$ $1\leq\cancel{P}\neq\infty$.

Nella risoluzione di $\underline{\mathfrak{M}}$ sono dati come noti $\underline{\mathfrak{R}}_{\underline{x}}$ $\underline{\mathfrak{X}}$ $\{\underline{F}_N(\underline{x}_p);p=1,\cancel{P}\}$ e contingentemente un insieme di condizioni $\underline{\mathfrak{C}}$ di cui la

$$\underline{\mathfrak{C}}\subset\{\{F_m(\underline{x}_p)-\mathbb{F}_{mp}=0;m=1,\cancel{m}\},\{F_{do}(\underline{x}_p)-\mathbb{F}_{dop}=0;o=1,\cancel{o}_d;d=1,\cancel{D}\};p=1,\cancel{P}\} \tag{2}$$

dove ogni $F_m(\underline{x}_p)-\mathbb{F}_{mp}=0$ significa che la $F_m(\underline{x})$ ha in $\underline{x}_p$ il valore noto $\mathbb{F}_{mp}$ (e analogamente per ogni $F_{do}(\underline{x}_p)-\mathbb{F}_{dop}=0$).

Le $\underline{\mathfrak{C}}$ implicano la possibilità che in un $\underline{x}_p$ divengano noti tutti gli inerenti $\underline{F}(\underline{x}_p)$ (cioè l'eventualità di alcune relazioni del tipo $\{F_m(\underline{x}_p)-\mathbb{F}_{mp}=0;m=1,\cancel{m}\}\subset\underline{\mathfrak{C}}$) e perciò danno luogo a una $\cancel{\underline{\mathfrak{X}}}\equiv\{\underline{x}_p;p=1,\cancel{P}\}\equiv\{\underline{x}_{p\langle p\rangle};p=1,\cancel{P}\}\subseteq\underline{\mathfrak{X}}$ tale che la numerosità di $\cancel{\underline{\mathfrak{X}}}$ è massima compatibilmente con l'essere in ogni $\underline{x}_p$ incognito almeno uno degli inerenti $\underline{F}(\underline{x}_p)$. Inoltre si ha anche l'eventualità che l'introduzione delle $\underline{\mathfrak{C}}$ in un $\underline{\mathfrak{M}}\langle\underline{x}_p\rangle$ faccia assumere la forma 0=0 ad alcune equazioni di questo.

Si chiama $\underline{\mathfrak{m}}_p$ il sistema di $\cancel{m}_p$ equazioni costituito sia dalle $\underline{\mathfrak{C}}\cap\{F_{do}(\underline{x}_{p\langle p\rangle})-\mathbb{F}_{dop\langle p\rangle}=0;o=1,\cancel{o}_d;d=1,\cancel{D}\}$ sia da quelle che si ottengono introducendo le $\underline{\mathfrak{C}}$ in $\underline{\mathfrak{M}}\langle\underline{x}_p\rangle$ e poi eliminando da questo le equazioni che tale introduzione avesse ridotto alla inutile forma 0=0.

Un tale $\underline{\mathfrak{m}}_p$ può essere privo di alcuni dei $\{\{F_m(\underline{x}_p);m=1,\cancel{m}\},\{D_d(\underline{x}_p);d=1,\cancel{D}\}\}$, può includere alcune delle $\underline{\mathfrak{C}}$, e se ne hanno le

$$\underline{\mathfrak{m}}_p\equiv\{E_{pm}(\underline{F}_{pm},\underline{D}_{pm}(\underline{x}_p))=0;m=1,\cancel{m}_p\}\ \underline{F}_{pm}\subseteq\underline{F}_p\equiv\{F_{pm};m=1,\cancel{\cancel{m}}_p\}\subseteq\underline{F}(\underline{x}_p)\ \underline{D}_{pm}(\underline{x}_p)\subseteq\underline{D}_p(\underline{x}_p)\equiv\{D_{pd}(\underline{x}_p);$$
$$d=1,\cancel{D}_p\}\ \cancel{\cancel{m}}_p\leq\cancel{m}_p\ D_{pd}(\underline{x})\equiv\partial^{\ddot{\cancel{o}}\langle p,d\rangle}F_{m\langle p,d\rangle}(\underline{x})/\partial x_{n\langle p,d,1\rangle}\partial x_{n\langle p,d,2\rangle}\ldots\partial x_{n\langle p,d,\cancel{o}\langle p,d\rangle\rangle}\ \ddot{\cancel{o}}_{pd}>0\ m_{pd}\in\{m=1,\cancel{m}\}$$
$$\underline{F}_{pd}(\underline{x})\equiv\{F_{pdo}(\underline{x});o=0,\ddot{\cancel{o}}_{pd}\}\ F_{pd0}(\underline{x})\equiv F_{m\langle p,d\rangle}(\underline{x})\ F_{pd\cancel{o}\langle p,d\rangle}(\underline{x})\equiv D_{pd}(\underline{x})$$
$$\{F_{pdo}(\underline{x})\equiv\partial F_{pd,o-1}(\underline{x})/\partial x_{n\langle p,d,o\rangle}\equiv\partial^{o}F_{m\langle p,d\rangle}(\underline{x})/\partial x_{n\langle p,d,1\rangle}\partial x_{n\langle p,d,2\rangle}\ldots\partial x_{n\langle p,d,o\rangle};o=1,\ddot{\cancel{o}}_{pd}\} \tag{3}$$

dove: i $\underline{F}_p$ compaiono in $\underline{\mathfrak{m}}_p$ (autonomamente o come funzioni derivande) e sono incogniti; i $\underline{D}_p(\underline{x}_p)$ compaiono in $\underline{\mathfrak{m}}_p$ e sono trattati tutti come incogniti anche se alcuni di essi sono resi noti dalle $\underline{\mathfrak{C}}$; ogni $\{n_{pdo};o=1,\ddot{\cancel{o}}_{pd}\}$ è una combinazione generalmente con ripetizione di classe $\ddot{\cancel{o}}_{pd}$ dei $\{n=1,\cancel{n}\}$.

Pertanto il sistema totale $\underline{\mathbb{M}}$ (di cui la $\underline{\mathbb{M}}\equiv\{\underline{\mathfrak{m}}_p;p=1,\cancel{P}\}$) è un sistema di $\cancel{\mathfrak{N}}_E$ equazioni (di cui la $\cancel{\mathfrak{N}}_E=\Sigma_{p=1,\cancel{P}}(\cancel{m}_p)$) dove sono incogniti sia i $\{\underline{D}_p(\underline{x}_p);p=1,\cancel{P}\}$ sia i $\cancel{\mathfrak{N}}_I$ valori $\{\underline{F}_p;p=1,\cancel{P}\}$ di cui la $\cancel{\mathfrak{N}}_I=\Sigma_{p=1,\cancel{P}}(\cancel{\cancel{m}}_p)\leq\cancel{\mathfrak{N}}_E$. Esprimendo dunque ognuno dei $\{D_{pd}(\underline{x}_p);d=1,\cancel{D}_p;p=1,\cancel{P}\}$ per mezzo di una rispettiva

$$D_{pd}(\underline{x}_p)=\mathbb{D}_{pd}(\underline{\mathcal{F}}_{pd},\epsilon_{Tpd})\equiv\mathbb{D}_{pd}(\underline{\mathcal{F}}_{pd})+\epsilon_{Tpd}\cong\mathbb{D}_{pd}(\underline{\mathcal{F}}_{pd}) \tag{4}$$

di cui le $\underline{\mathcal{F}}_{pd}\equiv\{\mathcal{F}_{pdi};i=1,\cancel{P}_{pd}\}\subseteq\{F_{m\langle p,d\rangle}(\underline{x}_p);p=1,\cancel{P}\}$ $\underline{\mathcal{F}}_{pd}\subseteq\{\underline{F}_p;p=1,\cancel{P}\}$ e dove $\mathbb{D}_{pd}(\underline{\mathcal{F}}_{pd})$ è una funzione nota che approssima la $\mathbb{D}_{pd}(\underline{\mathcal{F}}_{pd},\epsilon_{Tpd})$ con un errore ϵ_{Tpd} di cui si ammette la $\epsilon_{Tpd}\cong0$; $\underline{\mathbb{M}}$ diviene un sistema $\{E_{Ts}(\underline{F}_p;p=1,\cancel{P})=0;s=1,\cancel{\mathfrak{N}}_E\}$ non differenziale e generalmente non lineare, di $\cancel{\mathfrak{N}}_E$ equazioni nelle $\cancel{\mathfrak{N}}_I$ incognite $\{F_{pm};m=1,\cancel{\cancel{m}}_p;p=1,\cancel{P}\}$, e che in base alla $\cancel{\mathfrak{N}}_I\leq\cancel{\mathfrak{N}}_E$ può essere risolvibile con i noti metodi dell'analisi numerica quali quello di Newton-Raphson riferito nella sez. 2.4.5 di [1].

Infatti tale metodo è attuabile eseguendo alcune successive risoluzioni di un sistema lineare e, nel caso (quale è $\underline{\mathbb{M}}$) di un numero di equazioni N_E non minore del numero di incognite N_I, ognuna di tali risoluzioni può avvenire applicando la (2.3.4) di [1], e in particolare usando il metodo di Gauss con la variante del "massimo *pivot*" e con la sola modifica del considerare tutte le N_E equazioni anche se i *pivot* implicati sono solo N_I.

Come le $\underline{\mathfrak{C}}$, sono contingentemente note altre condizioni, ognuna costituita da un'equazione simile a quelle di $\underline{\mathfrak{W}}$ (cioè del tipo $\mathbb{E}(\mathbb{F}(\underline{x}),\mathbb{D}(\underline{x}),\underline{x})=0$ di cui le $\mathbb{F}(\underline{x})\subseteq\underline{F}(\underline{x})$ $\mathbb{D}(\underline{x})\subseteq\underline{D}(\underline{x})$), ma imposta solo su alcuni dei $\underline{\mathfrak{x}}$ cioè solo sugli elementi di un $\underline{\mathfrak{x}}$ di cui la $\underline{\mathfrak{x}}\subset\underline{\mathfrak{X}}$. Ognuna di tali condizioni può essere introdotta come segue nella risoluzione di $\underline{\mathfrak{W}}$: si aggiunge alle $\underline{F}(\underline{x})$ una funzione incognita ausiliaria $F_A(\underline{x})$ e a $\underline{\mathfrak{W}}$ l'inerente equazione moltiplicata per $F_A(\underline{x})$; si aggiungono alle $\underline{\mathfrak{C}}$ le condizioni costituite dall'avere la $F_A(\underline{x})$ i valori rispettivamente unitario e nullo negli elementi di $\underline{\mathfrak{x}}$ e $\underline{\mathfrak{X}}-\underline{\mathfrak{x}}$.

4 L'APPROSSIMAZIONE DI UNA DERIVATA DEL SISTEMA TOTALE CON UNA COMBINAZIONE LINEARE DI VALORI LOCALI DELLA FUNZIONE DERIVANDA.

4.1 L'insieme di segmenti rettilinei.

Inerentemente la $\underline{\mathfrak{X}}\equiv\{\underline{x}_p;p=1,\mathfrak{p}\}$ (detta in sez. 3), si pongono le $\underline{x}_p\equiv\{x_{pn};n=1,\mathfrak{n}\}$ $\{a,b\}\subset\{p=1,\mathfrak{p}\}$ $đ_{ab}\equiv(\Sigma_{n=1,\mathfrak{n}}((x_{bn}-x_{an})^2))^{0.5}$ $\boldsymbol{\tau}_{ab}\equiv\Sigma_{n=1,\mathfrak{n}}(\tau_{abn}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n)$ $\tau_{abn}\equiv(x_{bn}-x_{an})/đ_{ab}$. Perciò $đ_{ab}$ $\boldsymbol{\tau}_{ab}$ e τ_{abn} sono: la distanza tra $\underline{x}_a$ e $\underline{x}_b$, il versore della retta passante per questi e orientata da $\underline{x}_a$ a $\underline{x}_b$, e il n-esimo coseno direttore di tale retta.

Si sottintende che da $\underline{\mathfrak{X}}$ è deducibile un insieme di segmenti rettilinei $\underline{\mathfrak{R}}$, la cui numerosità è massima compatibilmente con le

$$\underline{\mathfrak{R}}\equiv\{\underline{\mathfrak{R}}_r;r=1,\mathfrak{r}\}\ \mathfrak{r}\geq1\ \{\exists\{\underline{x}_p\in\underline{\mathfrak{R}}_r\};p=1,\mathfrak{p}\}\ \{Æ\langle\underline{\mathfrak{R}}_r,r_r,\mathfrak{r}_r,\mathfrak{r}_r\ /\underline{C},c,\mathfrak{c},\mathfrak{c}\ /\text{sez. }2.2\rangle,\exists\{\mathfrak{r}_r=đ_{ab}\},\underline{\mathfrak{R}}_r\Leftrightarrow\underline{\mathfrak{P}}_r,$$
$$\underline{\mathfrak{P}}_r\equiv\{\underline{x}_{P\langle r,i\rangle};i=1,\mathfrak{i}_r\}=\underline{\mathfrak{R}}_r\cap\underline{\mathfrak{X}},\mathfrak{i}_r\geq3,\mathfrak{r}_r=0,\{r_{ri}<r_{r,i+1};i=1,\mathfrak{i}_r-1\},r_{ri}=đ_{P\langle r,1\rangle P\langle r,i\rangle};r=1,\mathfrak{r}\}\tag{1}$$

Si considerano i $\{\underline{x}_k;k=1,\mathfrak{k}\}$ di cui la $\underline{x}_1\neq\underline{x}_{\mathfrak{k}}$. La condizione che questi $\mathfrak{k}$ punti giacciono su una stessa retta è espressa dalla $\{\boldsymbol{\tau}_{1k}=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{1\mathfrak{k}};k=2,\mathfrak{k}-1\}$, di cui la $\omega_k\equiv\pm1$ e (in base alla $\{\boldsymbol{\tau}_{1k}=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{1\mathfrak{k}}\}\equiv$ $\{\boldsymbol{\tau}_{1k}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{1\mathfrak{k}}\cdot\boldsymbol{\upsilon}_n;n=1,\mathfrak{n}\}\equiv\{\tau_{1kn}=\omega_k\cdot\tau_{1\mathfrak{k}n};n=1,\mathfrak{n}\}\equiv\{\tau_{1kn}=\tau_{1\mathfrak{k}n};n=1,\mathfrak{n}\}\,\veebar\,\{\tau_{1kn}=-\tau_{1\mathfrak{k}n};n=1,\mathfrak{n}\}$) la

$$\{\boldsymbol{\tau}_{1k}=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{1\mathfrak{k}};k=2,\mathfrak{k}-1\}\equiv\{\{\tau_{1kn}=\tau_{1\mathfrak{k}n};n=1,\mathfrak{n}\}\,\veebar\,\{\tau_{1kn}=-\tau_{1\mathfrak{k}n};n=1,\mathfrak{n}\};k=2,\mathfrak{k}-1\}\tag{2}$$

La conoscenza dei $\{\underline{\mathfrak{P}}_r;r=1,\mathfrak{r}\}$ può essere conseguita con il seguente algoritmo. Si pongono le $\mathcal{A}_{ab\mathfrak{r}}\equiv\{\neg\{\boldsymbol{\tau}_{ak}=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{ab};k=\alpha_r,\beta_r\};r=1,\mathfrak{r}\}$ $\mathcal{B}_{ab}\equiv\exists\{\boldsymbol{\tau}_{ak}=\omega_k\cdot\boldsymbol{\tau}_{ab}\,|\,\underline{x}_k\in\underline{\mathfrak{X}}-\{a,b\}\}$ e la $\mathfrak{r}=0$, e si effettuano le $Б\langle\mathfrak{p},2\rangle$ iterazioni $\{I_{ab};b=a+1,\mathfrak{p};a=1,\mathfrak{p}-1\}$. Per ogni I_{ab}, se $\{\{\mathcal{A}_{ab\mathfrak{r}}\,|\,\mathfrak{r}>0\}\wedge\mathcal{B}_{ab}\}\,\veebar\,\{\{\mathfrak{r}=0\}\wedge\mathcal{B}_{ab}\}$ (questa condizione può essere controllata per mezzo della (2)) si incrementa $\mathfrak{r}$ di 1 e si pongono le $\alpha_{\mathfrak{r}}=a$ $\beta_{\mathfrak{r}}=b$. Dopo queste iterazioni sono noti i $\{\alpha_r,\beta_r;r=1,\mathfrak{r}\}$ e si effettuano le iterazioni indicate dal $\{r=1,\mathfrak{r}\}$. Per ogni r, si pone $\mathfrak{i}_r=0$ e si effettuano le iterazioni indicate dal $\{p=1,\mathfrak{p}\}$. Per ogni p, se $\{\boldsymbol{\tau}_{\alpha\langle r\rangle p}=\omega_p\cdot\boldsymbol{\tau}_{\alpha\langle r\rangle\beta\langle r\rangle}\}\wedge\{p\notin\{\alpha_r,\beta_r\}\}$, si incrementa $\mathfrak{i}_r$ di 1 e si pone la $P_{r\mathfrak{i}\langle r\rangle}=p$. Dopo queste $\mathfrak{p}$ iterazioni si modifica l'ordinamento successivo degli elementi di $\{P_{ri};i=1,\mathfrak{i}_r\}$ in modo che verifichino le $\exists đ_{P\langle r,1\rangle,P\langle r,i\rangle}=\max\langle đ_{P\langle r,c\rangle,P\langle r,c\rangle};c=1,\mathfrak{i}_r;c=1,\mathfrak{i}_r\rangle$ $\{đ_{P\langle r,1\rangle P\langle r,i\rangle}<đ_{P\langle r,1\rangle P\langle r,i+1\rangle};i=2,\mathfrak{i}_r-1\}$. Al termine di questo algoritmo è noto il $\{P_{ri};i=1,\mathfrak{i}_r;r=1,\mathfrak{r}\}$ che rende tali i $\{\underline{\mathfrak{P}}_r;r=1,\mathfrak{r}\}$.

4.2 L'espressione, per mezzo di un grafo ad albero, della combinazione lineare che approssima una derivata del sistema totale.

Una approssimazione (3.4) di un $D_{pd}(\underline{x}_p)$ (di cui le (3.3)) può essere ottenuta usando come schema logico un grafo ad albero orientato, implementato per mezzo della $\{Æ\langle F_{pd,o-1}(\underline{x})\ /f(\underline{x})\ /(2.3.2)\rangle;o=1,\ddot{\mathfrak{o}}_{pd}\}$ e dei segmenti $\underline{\mathfrak{R}}$ di cui la sez. 4.1.

Un grafo $\underline{\breve{G}}$ di cui la $\underline{\breve{G}}\equiv\{\underline{\check{N}},\underline{\check{A}}\}$, è costituito da un insieme di nodi $\underline{\check{N}}$ di cui le $\underline{\check{N}}\equiv\{\check{N}_{\check{n}};\check{n}=1,\check{\mathfrak{n}}\}$ $\check{\mathfrak{n}}\neq\infty$ e da un insieme di archi $\underline{\check{A}}$ di cui le $\underline{\check{A}}\equiv\{\check{A}_{\check{a}};\check{a}=1,\check{\mathfrak{a}}\}$ $\check{\mathfrak{a}}\neq\infty$ $\check{A}_{\check{a}}\equiv(\check{N}_a,\check{N}_b)$ $\check{N}_a\in\underline{\check{N}}$ $\check{N}_b\in\underline{\check{N}}$. Un arco $(\check{N}_a,\check{N}_b)$ è direzionale giacché identifica i nodi $\check{N}_a$ e $\check{N}_b$ rispettivamente come l'origine e la destinazione di un inerente percorso. Una $\underline{\check{C}}\equiv\{\check{A}_{\check{a}\langle i\rangle};i=1,\mathfrak{i}-1\}$ di cui la $\check{A}_{\check{a}\langle i\rangle}\equiv(\check{N}_{\check{n}\langle i\rangle},\check{N}_{\check{n}\langle i+1\rangle})\in\underline{\check{A}}$, definisce $\underline{\check{C}}$ come un cammino di $\underline{Ğ}$ ossia come un percorso che va da $Ň_{ň⟨1⟩}$ a $Ň_{ň⟨ɨ⟩}$ passando successivamente per i $\{Ň_{ň⟨i⟩};i=2,ɨ-1\}$. Un $\underline{Ğ}$ è connesso se $\{∃\underline{Č};∀\{Ň_{ň⟨1⟩},Ň_{ň⟨ɨ⟩}\}⊆\underline{Ň}\}$. Un $\underline{Ğ}$ è orientato o non orientato, rispettivamente se $(Ň_a,Ň_b)≢(Ň_b,Ň_a)$ o $(Ň_a,Ň_b)≡(Ň_b,Ň_a)$. Un $\underline{Ğ}$ è un albero se $ᶏ=ꞥ-1$ e se è connesso il grafo che se ne deduce aggiungendo a ogni $(Ň_a,Ň_b)$ un rispettivo $(Ň_b,Ň_a)$. Un albero orientato $\underline{Ğ}$ ha un nodo radice $Ň_R$ (di cui la $Ň_R∈\underline{Ň}$) che verifica la $\{Ň∈\underline{Ň}-Ň_R\}\underline{→}∃\{\underline{Č} \mid \{Ň_{ň⟨1⟩},Ň_{ň⟨ɨ⟩}\}≡\{Ň,Ň_R\}\}$ o la

$$\{Ň∈\underline{Ň}-Ň_R\}\underline{→}∃\{\underline{Č} \mid \{Ň_{ň⟨1⟩},Ň_{ň⟨ɨ⟩}\}≡\{Ň_R,Ň\}\} \quad (1)$$

Una $Ň_ň≡Ş$ afferma che l'oggetto $Ş$ è associato al nodo $Ň_ň$. Il grafo ad albero orientato (cioè l'albero orientato) $\underline{Ğ}$ che si usa per ottenere un'approssimazione (3.4) di un $D_{pd}(\underline{x}_p)$, è in particolare specificato, oltre che dalle $ᶏ=ꞥ-1$ e (1), dalle

$$\underline{Ň}=\{\underline{Ň}_q;q=0,Ө_{pd}\}\ \underline{Ň}_q≡\{Ň_{ň⟨q,ń⟩};ń=1,ꞥ́_q\}\ \underline{Ň}_0≡Ň_{ň⟨0,1⟩}≡Ň_R\ \{¬∃\{Ă_ă \mid \{Ň_a,Ň_b\}⊆\underline{Ň}_q\};q=0,Ө_{pd}\}$$
$$\{¬∃\{Ă_ă \mid Ň_a∈\underline{Ň}_q,Ň_b∉\underline{Ň}_{q+1}\};q=0,Ө_{pd}-1\}\ ¬∃\{Ă_ă \mid Ň_a∈\underline{Ň}_{Ө⟨p,d⟩}\}$$
$$\underline{Ă}=\{(Ň_{ň⟨q,ń⟩},Ň_{ň⟨q,ń,n,ŋ⟩});ŋ=1,ŋ_{qńn};n=1,ꞥ;ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}-1\}$$

e (con riferimento alle (3.3) e $\underline{x}_p≡\underline{x}_{p⟨p⟩}$) dalle

$$Ň_{ň⟨0,1⟩}≡D_{pd}(\underline{x}_{𝕡⟨0,1⟩})\ 𝕡_{01}=p_p\ \{Ň_{ň⟨q,ń⟩}≡ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q}(\underline{x}_{𝕡⟨q,ń⟩});ń=1,ꞥ́_q;q=1,Ө_{pd}-1\}\ \{Ň_{ň⟨Ө⟨p,d⟩,ń⟩}≡F_{m⟨p,d⟩}(\underline{x}_{𝕡⟨Ө⟨p,d⟩,ń⟩});ń=1,ꞥ́_{Ө⟨p,d⟩}\}$$

di cui le $\{𝕡_{qń}∈\{p=1,Ᵽ\};ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}\}$ $\underline{Ẋ}≡\{\underline{x}_p;p=1,Ᵽ\}$, e (con riferimento alle (3.2) e (4.1.1)) dalle

$$\{\{\{ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q}(\underline{x}_{𝕡⟨q,ń⟩})-𝔽_{pd,Ө⟨p,d⟩-q,𝕡⟨q,ń⟩}=0\}∈\underline{ℭ}\}\underline{↔}¬∃(Ň_{ň⟨q,ń⟩},Ň_b)∈\underline{Ă};ń=1,ꞥ́_q;q=1,Ө_{pd}-1\}$$
$$\{\{Ň_{ň⟨q,ń,n,ŋ⟩}≡ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q-1}(\underline{x}_{P⟨r⟨q,ń,n⟩,ŋ⟩});ŋ=1,ŋ_{qńn}\},ŋ_{qńn}=ɨ_{r⟨q,ń,n⟩};n=1,ꞥ;ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}-1\}$$

di cui le $r_{qńn}∈\{r=1,Ɽ\}$ $\underline{ℜ}≡\{\underline{ℜ}_r;r=1,Ɽ\}$ $∩_{n=1,ꞥ}(\underline{ℜ}_{r⟨q,ń,n⟩})=\underline{x}_{𝕡⟨q,ń⟩}$.

L'individuazione del $\underline{Ğ}$ in argomento è completata dalla

$$\{Æ⟨ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q}(\underline{x}_{𝕡⟨q,ń⟩}),x_{n⟨p,d,Ө⟨p,d⟩-q⟩},\{\{ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q-1}(\underline{x}_{P⟨r⟨q,ń,n⟩,ŋ⟩});ŋ=1,ɨ_{r⟨q,ń,n⟩}\},\underline{ℜ}_{r⟨q,ń,n⟩};n=1,ꞥ\}\ /$$
$$∂f(\underline{x})/∂x_n,x_n,\{\{ꬵ_{c⟨n,𝔹⟩}(c_{c⟨n,𝔹⟩i});i=1,ɨ_{c⟨n,𝔹⟩}\},\underline{c}_{c⟨n,𝔹⟩};n=1,ꞥ\}\ /(2.3.2)⟩;ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}-1\}$$

che dà luogo alla

$$\{ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q}(\underline{x}_{𝕡⟨q,ń⟩})≅Σ_{n=1,ꞥ}(Σ_{ŋ=1,ɨ⟨r⟨q,ń,n⟩⟩}(Λ_{qńnŋ}·ꞙ_{pd,Ө⟨p,d⟩-q-1}(\underline{x}_{P⟨r⟨q,ń,n⟩,ŋ⟩})));ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}-1\}$$

dove ogni $Λ_{qńnŋ}$ è noto come una specificazione del $T_{𝔹nn}·λ_{c⟨n,𝔹⟩i}$ della (2.3.2), avendone la $\{\{Ň_{ň⟨q,ń,n,ŋ⟩}≡Λ_{qńnŋ};ŋ=1,ŋ_{qńn}\},ŋ_{qńn}=ɨ_{r⟨q,ń,n⟩};n=1,ꞥ;ń=1,ꞥ́_q;q=0,Ө_{pd}-1\}$.

In quanto testé è usato l'insieme di segmenti rettilinei $\underline{ℜ}$ invece di un insieme di curve generalmente non rettilinee, poiché (come detto in sez. 2.2) il massimo valore assoluto di una derivata definita su una curva generalmente è minore se questa è un segmento rettilineo, e quindi è generalmente minore anche l'inerente errore (del tipo (2.1.2.1.13)) che influisce (come detto in sez. 2.3) sulla precedente approssimazione.

Si considera (inerentemente il grafo ad albero orientato $\underline{Ğ}$ in argomento) l'insieme $\{\underline{Č}_κ;κ=1,ꝁ\}$ di ogni cammino $\underline{Č}_κ$ di cui la $¬∃\underline{Č}⊃\underline{Č}_κ$. Ogni $\underline{Č}_κ$ è un percorso che va da $Ň_R$ a un nodo di $\underline{Ň}_{Ө⟨p,d⟩}$ cui è associato un elemento di $\underline{ℱ}_{pd}$ (argomento della (3.4)) oppure che va da $Ň_R$ a un nodo di $\{\underline{Ň}_q;q=1,Ө_{pd}\}$ cui è associato il valore noto di un elemento di $\underline{ℭ}$ (di cui la (3.2)). Perciò si ha la $\{\underline{Č}_κ;κ=1,ꝁ\}=\{\underline{Č}_{κ⟨a⟩};a=1,ᶏ\}+\{\underline{Č}_{κ⟨b⟩};b=ᶏ+1,ꝁ\}$ i cui $\underline{Č}_{κ⟨a⟩}$ e $\underline{Č}_{κ⟨b⟩}$ sono dei rispettivi due tipi testé detti, e quindi la cercata approssimazione (3.4) del $D_{pd}(\underline{x}_p)$ può essere la

$$D_{pd}(\underline{x}_p)≅Σ_{a=1,ᶏ}(Λ_{κ⟨a⟩}·F_{m⟨p,d⟩}(\underline{x}_{P⟨p,d,a⟩}))+ℭ_{pd}$$

di cui le $ℭ_{pd}≡Σ_{b=ᶏ+1,ꝁ}(Λ_{κ⟨b⟩}·ℭ_{κ⟨b⟩})$ $\underline{x}_{P⟨p,d,a⟩}∈\underline{Ẋ}$ $F_{m⟨p,d⟩}(\underline{x}_{P⟨p,d,a⟩})∈\underline{ℱ}_{pd}$, con $ℭ_{κ⟨b⟩}$ uno dei valori noti in $\underline{ℭ}$, e con $Λ_κ$ (di cui la $κ≡\{κ_{a}▫\dot{∨}▫κ_b\}$) il prodotto di tutti i fattori del tipo $Λ_{qńnŋ}$ che sono associati ai nodi di $\underline{Č}_κ$.

Introducendo la $F_{m⟨p,d⟩}(\underline{x}_{P⟨p,d,a⟩})=Σ_{p=1,Ᵽ}(δ_{p,P⟨p,d,a⟩}·F_{m⟨p,d⟩}(\underline{x}_p))$ nella precedente approssimazione di

$D_{pd}(\underline{x}_p)$, si ha la

$$D_{pd}(\underline{x}_p) \cong \Sigma_{p=1,\text{₽}}(\mathbb{\Lambda}_{pd\mathrm{p}} \cdot F_{m\langle p,d\rangle}(\underline{x}_\mathrm{p})) + \mathfrak{C}_{pd} \quad (2)$$

di cui la $\mathbb{\Lambda}_{pd\mathrm{p}} \equiv \Sigma_{a=1,\text{₳}}(\Lambda_{\kappa\langle a\rangle} \cdot \delta_{p,P\langle p,d,a\rangle})$ e i cui $\{\mathbb{\Lambda}_{pd\mathrm{p}};\mathrm{p}=1,\text{₽}\}$ e $\mathfrak{C}_{pd}$ possono essere resi noti da un algoritmo basato sulla $Æ\langle \underline{x}_\mathrm{p}, \{\underline{\mathfrak{X}}_{\mathbb{r}\langle p,n,n\rangle}; n=1,\text{₦}\} / \underline{x}, \{\underline{C}_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle}; n=1,\text{₦}\} / (2.3.2)\rangle$ la quale dà luogo alla $\partial f(\underline{x}_\mathrm{p})/\partial x_n \cong \Sigma_{n=1,\text{₦}}(\Sigma_{i=1,\text{ɨ}\langle \mathbb{r}\langle p,n,n\rangle\rangle}(\lambda_{pnni} \cdot f_{\mathbb{r}\langle p,n,n\rangle}(r_{\mathbb{r}\langle p,n,n\rangle i})))$ dove ogni λ_{pnni} è noto e (con riferimento alla (4.1.1)) attinente al punto $\underline{x}_{P\langle \mathbb{r}\langle p,n,n\rangle,i\rangle}$. Tale algoritmo è scritto come segue in uno pseudolinguaggio derivato dal linguaggio di programmazione *Visual Basic*.

```
{βp=0;p=1,₽} N = n_pdӫ⟨p,d⟩
For n = 1 To ₦
𝕣 = 𝕣_p⟨p⟩Nn
    For i = 1 To ɨ_𝕣
    β_P⟨𝕣,i⟩ = λ_p⟨p⟩Nni
    Next i
Next n
ℭpd = 0 IB ≡ T
For q = 1 To Ӫpd−1
N = n_pd,ӫ⟨p,d⟩−q
    If IB ≡ T Then
    IB ≡ F
    Call SubrA(q,N,{αp;p=1,₽},{βp;p=1,₽},ℭpd)
    Else
    IB ≡ T
    Call SubrA(q,N,{βp;p=1,₽},{αp;p=1,₽},ℭpd)
Next q
If IB ≡ T Then
Call SubrB({βp;p=1,₽},ℭpd,{Λpdp;p=1,₽})
Else
Call SubrB({αp;p=1,₽},ℭpd,{Λpdp;p=1,₽})
End If

Sub SubrA(q,N,{αp;p=1,₽},{βp;p=1,₽},ℭpd)
{αp=0;p=1,₽}
For p = 1 To ₽
    If {F_pd,ӫ⟨p,d⟩−q(x_p)−𝔽_pd,ӫ⟨p,d⟩−q,p=0}∈ℭ Then
    ℭpd = ℭpd + βp·𝔽_pd,ӫ⟨p,d⟩−q,p
    Else
        For n = 1 To ₦
        𝕣 = 𝕣_pNn
            For i = 1 To ɨ_𝕣
            α_P⟨𝕣,i⟩ = α_P⟨𝕣,i⟩ + βp·λ_pNni
            Next i
        Next n
    End If
Next p
End Sub
```

```
Sub SubrB({αp;p=1,Ᵽ},Ȼpd,{⩓pdp;p=1,Ᵽ})
For p = 1 To Ᵽ
    If {Fm⟨p,d⟩(x̲p)−𝔽m⟨p,d⟩p=0}∈ℭ̲ Then
    Ȼpd = Ȼpd + αp·𝔽m⟨p,d⟩p
    ⩓pdp = 0
    Else
    ⩓pdp = αp
    End If
Next p
End Sub
```

5 PEEI: UN PROGRAMMA AL COMPUTER PER LA RISOLUZIONE NUMERICA DI MODELLI ANALITICI DIFFERENZIALI.

Le definizioni i procedimenti e i risultati delle precedenti sezioni, sono stati utilizzati per realizzare un programma di elaborazione automatica finalizzato alla risoluzione numerica di modelli analitici differenziali. A tale programma è stato dato il nome PEEI come acronimo di “Programma agli Elementi di Estensione Infinitesima”.

La realizzazione di PEEI (intendendone come nel seguito l’attuale versione 1.0.0.0 del 23/05/2008) è avvenuta nell’ambiente integrato di sviluppo *Microsoft Visual Basic 2008 Express Edition*, che è disponibile gratuitamente in http://www.microsoft.com/express/vb/. Il codice sorgente scritto dall’Autore (nel linguaggio di programmazione *Visual Basic .NET*) è costituito da 94 sottoprogrammi per complessive 2760 righe. Il codice eseguibile di PEEI è contenuto nel file peei.exe di 257 kilobytes e può essere eseguito sotto il sistema operativo *Microsoft Windows* versioni *XP*, *Vista, Server 2003*.

Il programma PEEI può essere da chiunque gratuitamente installato e usato nel proprio computer, essendo tale installazione disponibile in http://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/. A questo stesso indirizzo sono disponibili anche il file PEEI_QG.pdf (una *quick guide* con le informazioni essenziali per l’uso) e le descrizioni dettagliate (ognuna contenuta in un rispettivo file compresso di tipo *zip*) di alcune tra le prime applicazioni. In http://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/screenshots.htm sono riportati tre *screenshot* tipici (iniziale intermedio e finale) della interfaccia grafica (la *GUI* come *Graphical User Interface*) di PEEI.

Una priorità, che nella realizzazione di PEEI ha avuto preminente importanza, è stata il perseguimento della massima semplicità e logicità, sia della sua interfaccia grafica, sia dell’input che l’utente gli deve fornire per effettuarne un’esecuzione volta a produrne una certa applicazione. È stata altresì dedicata molta attenzione alla significatività e utilità delle informazioni e dei messaggi che, durante un’esecuzione, PEEI invia sistematicamente od occasionalmente all’utente per notificargli avvenimenti avvertimenti ed errori.

Si pongono le 𝕒≡{first execution without memory} 𝕓≡{first execution with memory} 𝕪≡{later execution} 𝕕≡{normal procedure} 𝕖≡{better procedure} α≡{differential model} β≡conditions γ≡{points coordinates and properties} δ≡{mesh memory} ε≡solution.

Il detto input di PEEI è interamente indicabile nella sua interfaccia grafica, ed è suddiviso (anche visivamente) tra una parte necessaria e una opzionale che può essere trascurata.

La parte necessaria è costituita da

1) L'opzione $\alpha.\vee.\beta.\vee.\gamma$.

2) I nomi di due file esistenti, che hanno estensione .txt, etichettati rispettivamente α e β, e i cui rispettivi nomi sono tipicamente MAD.txt e COND.txt.

3) Il nome di un file esistente: con estensione .txt, etichettato γ, il cui nome tipico è POINTS.txt, se è attiva l'opzione $\alpha.\vee.\beta$; oppure con estensione .bin, etichettato δ, il cui nome tipico è PEEI_mem_0.bin, se è attiva l'opzione γ.

La parte opzionale è costituita da

1) L'opzione $\delta.\vee.\varepsilon$, se è attiva l'opzione $\alpha.\vee.\beta$.

2) Il nome di un file etichettato ε e il cui nome tipico è PEEI_sol_0.txt.

Le suddette descrizioni di applicazioni disponibili in http://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/, contengono (utili come esempi) le corrispondenti specificazioni di questi file testé detti.

I α γ e β sono file di testo scritti dall'utente prima dell'esecuzione di PEEI. I dati contenuti in questi file sono numeri separati da almeno uno spazio vuoto (*blank character*) e/o almeno un carattere di controllo (e.g. *carriage return* e *line feed*). Nelle seguenti definizioni dei dati presenti in questi file è (come di consueto) considerato assente ogni $\{ş_i;i=\cancel{i},\cancel{i}\}$ di cui la $\cancel{i}>\cancel{i}$. I δ e ε sono file, rispettivamente binario e di testo, scritti da PEEI e disponibili per l'utente dopo la sua esecuzione.

Il file α contiene la traduzione (comprensibile da PEEI) del $\underline{\mathfrak{M}}$ definito dalle (3.1). Affinché tale traduzione sia possibile, $\underline{\mathfrak{M}}$ deve poter essere espresso dalle

$$\underline{\mathfrak{M}}\langle\underline{x}\rangle\equiv\{\mathsf{EQ}_m(\underline{x})=0;m=1,\cancel{m}\}\ \mathsf{EQ}_m(\underline{x})\equiv\Sigma_{a=1,\cancel{a}\langle m\rangle}(\mathsf{A}_{ma}(\underline{x}))\ \mathsf{A}_{ma}(\underline{x})\equiv\mathsf{K}_{ma}\cdot\Pi_{b=1,\cancel{b}\langle m,a\rangle}(\mathsf{F}_{mab}(\underline{x}))$$

$$\mathsf{F}_{mab}(\underline{x})\equiv(\mathsf{B}_{mab}(\underline{x}))^{\mathsf{E}\langle m,a,b\rangle}\ \mathsf{B}_{mab}(\underline{x})\equiv\partial^{\cancel{\theta}\langle m,a,b\rangle}\mathbb{F}_{\mathsf{m}\langle m,a,b\rangle}(\underline{x})/\partial x_{\mathsf{n}\langle m,a,b,1\rangle}\partial x_{\mathsf{n}\langle m,a,b,2\rangle}\ldots\partial x_{\mathsf{n}\langle m,a,b,\cancel{\theta}\langle m,a,b\rangle\rangle}$$

dove: $\mathsf{m}_{mab}\in\{m=1,\cancel{M}\}$, $\{\mathbb{F}_m(\underline{x});m=1,\cancel{M}\}\equiv\{\underline{F}(\underline{x}),\underline{F}_N(\underline{x})\}$, $\cancel{\theta}_{mab}\geq0$, $\cancel{\theta}_{mab}=0$ se $\mathsf{m}_{mab}\in\{m=\cancel{m}+1,\cancel{M}\}$, $\{\mathsf{n}_{mabc}\in\{n=1,\cancel{n}\};c=1,\cancel{\theta}_{mab}\}$.

Questa espressione di $\underline{\mathfrak{M}}$ non ha la stessa generalità della (3.1), in particolare perché $\mathsf{B}_{mab}(\underline{x})$ vi può comparire solo come base di una potenza e non come un argomento di una generica funzione. Tuttavia tale limitazione attualmente sembra di minore importanza e in futuro potrà essere occasionalmente eliminata se sarà necessario.

Specificatamente il file α contiene successivamente i seguenti numeri: $\cancel{n}$ (di cui $\cancel{n}>0$), $\cancel{m}$ (di cui $\cancel{m}>0$), $\cancel{m}$ (di cui $\cancel{m}=\cancel{M}-\cancel{m}\geq0$), $\{\cancel{a}_m,\{\mathsf{K}_{ma},\cancel{b}_{ma},\{\mathsf{E}_{mab},\cancel{\theta}_{mab},\mathsf{m}_{mab},\{\mathsf{n}_{mabc};c=1,\cancel{\theta}_{mab}\};b=1,\cancel{b}_{ma}\};a=1,\cancel{a}_m\};m=1,\cancel{m}\}$ (di cui $\cancel{a}_m>0$ e $\cancel{b}_{ma}\geq0$).

Il file γ contiene, per ogni $\underline{x}_p$ di cui le $\underline{\cancel{x}}\equiv\{\underline{x}_p;p=1,\cancel{p}\}$ e $\underline{x}_p\equiv\{x_{pn};n=1,\cancel{n}\}$ (dette nelle sezioni 3 e 4.1), le $\cancel{n}$ coordinate di tale p-esimo punto e i $\cancel{m}$ valori in esso delle $\underline{F}_N(\underline{x})$: specificatamente questo file contiene successivamente i numeri $\{\{x_{pn};n=1,\cancel{n}\},\{F_{Nm}(\underline{x}_p);m=\cancel{m}+1,\cancel{M}\};p=1,\cancel{p}\}$ di cui $\cancel{p}\geq3$.

Il file β contiene la traduzione delle condizioni $\underline{\mathfrak{C}}$ (di cui la (3.2)). Specificatamente questo file contiene successivamente i numeri $\{\Pi_p,m_p,\cancel{\theta}_p,\{\tilde{n}_{pa};a=1,\cancel{\theta}_p\},v_p;p=1,\cancel{p}\}$, di cui $\cancel{p}\geq0$ e dove v_p è il valore di una corrispondente $\partial^{\cancel{\theta}\langle p\rangle}F_{m\langle p\rangle}(\underline{x}_{\Pi\langle p\rangle})/\partial x_{\tilde{n}\langle p,1\rangle}\partial x_{\tilde{n}\langle p,2\rangle}\ldots\partial x_{\tilde{n}\langle p,\cancel{\theta}\langle p\rangle\rangle}$ di cui le $\Pi_p\in\{p=1,\cancel{p}\}$ $m_p\in\{m=1,\cancel{m}\}$ $\cancel{\theta}_p\geq0$ $\{\tilde{n}_{pa}\in\{n=1,\cancel{n}\};a=1,\cancel{\theta}_p\}$.

Se $\alpha.\vee.\beta$, PEEI consuma una parte notevole delle risorse del computer complessivamente necessarie per l'inerente esecuzione, allo scopo di ottenere informazioni dedotte dal solo file γ. Perciò, se β, PEEI memorizza tali informazioni in un file binario, affinché esse siano poi disponibili meno onerosamente in una successiva esecuzione, che ha γ e questo file inserito come δ, e che deve essere inerente lo stesso file γ ma non necessariamente gli stessi file α e β.

Quando PEEI interrompe la propria esecuzione a causa di un errore, esso invia un messaggio che ne contiene una descrizione. Durante una sua esecuzione PEEI compie le seguenti successive azioni di maggiore rilievo.

- Legge i nomi dei tre file che costituiscono la parte necessaria dell'input, e si interrompe se uno di essi non esiste o non ha l'anzidetta estensione.

- Se β, assegna al file binario (come detto in scrittura) un nome nuovo tra quelli della directory del file γ (avendo come detto una corrispondenza biunivoca tra questi due file).

- Legge il file α. Se γ, legge il file δ. Se α.∨.β, legge il file γ. Se β, inizia la scrittura del file binario.

- Se α.∨.β, determina l'insieme di segmenti rettilinei $\underline{\mathfrak{X}}$ di cui la (4.1.1) ossia esegue l'algoritmo di sez. 4.1 per determinarne i $\{\mathfrak{P}_r;r=1,\mathfrak{R}\}$. In questa esecuzione, se δ, è escluso dai $\underline{\mathfrak{X}}$ ogni segmento che non è parallelo a uno degli assi coordinati.

- Se {α.∨.β}.∧.ε, calcola per ognuno dei $\{\underline{x}_{P\langle r,i\rangle};i=1,\mathfrak{i}_r;r=1,\mathfrak{R}\}$ della (4.1.1), applicando la (2.1.2.1.13) (cioè eseguendone l'algoritmo che la definisce) e la (2.2.10), la corrispondente specificazione del ψ_c della $|\epsilon_c|\leq\psi_c\cdot\varphi_c$ di sez. 2.3.

- Se {α.∨.β}.∧.ε, seleziona, per ogni $\underline{x}_p\in\underline{\mathfrak{X}}$ e ognuno dei $\{n=1,\mathfrak{n}\}$, gli $\mathfrak{n}$ segmenti che specificano le $\{\underline{C}_{c\langle n,\mathbb{B}\rangle};n=1,\mathfrak{n}\}$ della (2.3.2) (se {α.∨.β}.∧.δ questa selezione non avviene, perché in ogni $\underline{x}_p$ si intersecano solo $\mathfrak{n}$ segmenti ognuno parallelo a un rispettivo asse coordinato).

- Se α.∨.β, calcola per ognuno dei $\{\underline{x}_{P\langle r,i\rangle};i=1,\mathfrak{i}_r;r=1,\mathfrak{R}\}$ i rispettivi coefficienti che specificano i $\{\lambda_{pp};p=1,\mathfrak{p}\}.\vee.\{\lambda_p;p=1,\mathfrak{p}\}$ della (2.1.2.10). Se β, termina la scrittura del file binario.

- Legge il file β. Scrive il sistema totale $\mathfrak{W}$ della sez. 3 (trattando ancora come incogniti i $\{\underline{D}_p(\underline{x}_p);p=1,\mathfrak{P}\}$). Calcola, per ognuno dei $\{D_{pd}(\underline{x}_p);d=1,\mathfrak{D}_p;p=1,\mathfrak{P}\}$ e applicando l'algoritmo di sez. 4.2, i corrispondenti $\{\Lambda_{pd}p;p=1,\mathfrak{P}\}$ e $\mathfrak{C}_{pd}$ della (4.2.2). Risolve $\mathfrak{W}$ usando il metodo di Newton-Raphson. Notifica che l'esecuzione è stata completata, il nome (nuovo tra quelli della data directory) del file ε che contiene l'inerente soluzione, e il nome del file binario se β.

Tale file ε in particolare contiene $\mathfrak{P}$ righe (una per ogni $\underline{x}_p\in\underline{\mathfrak{X}}$), e la p-esima contiene successivamente: il numero p, il simbolo ":" e uno spazio vuoto, i $\{\mathfrak{f}_{mp};m=1,\mathfrak{m}\}$ (di cui la $\underline{\mathfrak{S}}\equiv\{\mathfrak{f}_{mp};m=1,\mathfrak{m};p=1,\mathfrak{P}\}$ di sez. 3, cioè i valori calcolati come approssimazioni dei rispettivi $\{F_m(\underline{x}_p);m=1,\mathfrak{m}\}$) separati da due spazi vuoti. L'approssimazione dei $\{F_m(\underline{x}_p);m=1,\mathfrak{m};p=1,\mathfrak{P}\}$ con i rispettivi $\underline{\mathfrak{S}}$, generalmente migliora con un maggiore $\mathfrak{P}$, una più uniforme distribuzione dei $\underline{\mathfrak{X}}$ in $\Re\langle\underline{x}\rangle$, e una maggiore numerosità delle condizioni $\underline{\mathfrak{C}}$ e delle altre condizioni dette alla fine della sez. 3. Una soluzione $\underline{\mathfrak{S}}$ sufficientemente attendibile può essere individuata come l'ultima di una successione sufficientemente coerente e numerosa, e ottenuta migliorando successivamente i tre requisiti testé detti.

La procedura ε è generalmente migliore della δ, perché applica la (2.3.2) selezionando gli inerenti $\mathfrak{n}$ segmenti come quelli che minimizzano l'errore massimo della approssimazione. Però l'aumentare di $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{P}$ implica un rapido aumento dell'onere computazionale della ε rispetto quello della δ. Tuttavia, nel caso di molte successive applicazioni tutte inerenti uno stesso file γ, un tale maggiore onere potrebbe essere conveniente giacché può essere limitato alla sola prima di esse.

Le coordinate cartesiane $\underline{x}$ possono all'occorrenza essere sostituite da altre coordinate $\underline{x}$ di cui le $\Re\langle\underline{x}\rangle\Leftrightarrow\Re\langle\underline{x}\rangle$ Æ$\langle\underline{x},\underline{x}\,/\underline{u},\underline{v}\,/$(2.4.6.1) di [1]$\rangle$ (per esempio le $x=x(\rho,\alpha)\equiv\rho\cdot\cos\langle\alpha\rangle$ $y=y(\rho,\alpha)\equiv\rho\cdot\mathrm{sen}\langle\alpha\rangle$ $\Re\langle\rho\rangle\equiv[0,\infty)$ $\Re\langle\alpha\rangle\equiv[0,2\cdot\pi)$, da cui si deducono le $\rho=\rho(x,y)\equiv(x^2+y^2)^{0.5}$ $\alpha=\alpha(x,y)\equiv\mathrm{arcsen}(y/(x^2+y^2)^{0.5})$ $\Re\langle x\rangle\equiv\Re\langle y\rangle\equiv(-\infty,\infty)$ Æ$\langle\{x,y\},2\,/\underline{x},\mathfrak{n}\rangle$, portano che le coordinate $\{x,y\}$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale bidimensionale possono essere sostituite dalle coordinate $\{\rho,\alpha\}$ di un sistema di riferimento polare). Nell'uso di PEEI una tale sostituzione, cioè quella di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale che ha le coordinate $\underline{x}$ con un altro sistema di riferimento, dà luogo solo a modificazioni trascurabili e interne al programma, quali il divenire generalmente non rettilinei i segmenti $\underline{\mathfrak{x}}$.

Conclusioni

Questo lavoro ha avuto origine da un'attività dell'Autore, la cui prosecuzione implica la capacità di risolvere numericamente un'ampia casistica di modelli analitici differenziali.

A tale proposito sono stati selezionati come essenziali, ed analizzati, i contenuti esposti nelle sezioni 2 3 e 4, e sulla base di questi è stato poi realizzato il programma PEEI descritto nella sez. 5.

La sicura compiutezza di questo programma, dato il suo vastissimo possibile campo di applicazione, non è immediatamente attestabile ma ne richiede un utilizzo adeguatamente lungo e diversificato.

Tuttavia la speranza di risultati ed eventuali miglioramenti condivisi e diffusamente controllabili (nonché l'impegno e la cura profusi) hanno indotto l'Autore a rendere PEEI pubblicamente e gratuitamente disponibile in http://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/. In questo senso l'Autore sarà grato per opinioni commenti e segnalazioni, che possono essere inviati all'indirizzo di posta elettronica publications@giacomo.lorenzoni.name.

Bibliografia

[1] Giacomo Lorenzoni, *Analytical argumentations of probability and statistics*, http://www.giacomo.lorenzoni.name/arganprobstat/, 13/02/2007.

[2] Roberto Bevilacqua, Dario Bini, Milvio Capovani, Ornella Menchi, *Metodi Numerici*, Zanichelli, 1997, Bologna.

[3] Paola Favati, Grazia Lotti, Ornella Menchi, Francesco Romani, *Approssimazione numerica*, Le Scienze Quaderni, n. 84, 1995

[4] Dario Bini, Milvio Capovani, Ornella Menchi, *Metodi numerici per l'algebra lineare*, Zanichelli, 1993, Bologna.

[5] Giuseppe Vaccaro, *Lezioni di geometria con elementi di algebra lineare*, Editoriale Veschi, 1991, Milano.

[6] Giorgio Ausiello, Alberto Marchetti Spaccamela, Marco Protasi, *Teoria e progetto di algoritmi fondamentali*, Franco Angeli Libri, 1988, Milano

[7] AA. VV., *Manuale di informatica (a cura di Giacomo Cioffi e Vincenzo Falzone)*, Edizioni Calderini, 1987, Bologna.

[8] V. I. Smirnov, *Corso di matematica superiore I*, Editori Riuniti, 1983, Roma.

[9] B. P. Demidovic, I.A. Maron, *Fondamenti di calcolo numerico,* M.I.R., 1981, Mosca.

[10] Aldo Ghizzetti, Francesco Rosati, *Lezioni di analisi matematica*, vol. II, Veschi, 1973, Roma.

[11] Aldo Ghizzetti, *Lezioni di analisi matematica*, vol. I, Veschi, 1972, Roma.