Una nuova legge della meccanica del continuo

Giacomo Lorenzoni

qualifications/experience: http://orcid.org/0000-0002-2329-2881

email: info@giacomo.lorenzoni.name; info@pec.giacomo.lorenzoni.name

Sommario

Alla meccanica del continuo, scienza fisica per antonomasia in quanto studia il mondo comunemente percepito dai sensi umani, manca il suo risultato più importante consistente in un modello termomeccanico di applicabilità generale, privo di approssimazioni di leggi valide per tutta la materia e matematicamente risolvibile. In precedenti lavori esponemmo una teoria che, introducendo principi del tutto inediti tra cui la nuova legge in oggetto (che lega densità, velocità e pressione termodinamica), pervenne a un sistema di equazioni alle derivate parziali ipotizzabile per costituire l'anzidetto risultato. Questo scritto, a fronte della necessità di ulteriori verifiche teoriche, numeriche e sperimentali di tale nuovo modello generale, ha lo scopo preparatorio di convalidare teoricamente la detta legge nella coerenza con la meccanica del continuo normalmente consolidata e condivisa. A tale fine sono premessi i necessari strumenti di logica, calcolo tensoriale e analisi matematica, circostanziando altresì leggi e principi dello stato dell'arte. Inoltre è considerata la compatibilità della nuova legge con l'attuale modello generale e con le sue più note specificazioni, ed è individuato nell'assenza di equazioni costitutive per gli sforzi un rilevante vantaggio del nuovo modello rispetto quello attuale.

Parole chiave: una nuova legge, meccanica del continuo, dinamica.

A new law of continuum mechanics

Abstract

The continuum mechanics, physical science par excellence in that it studies the world commonly perceived by the human senses, lacks its most important result consisting of a thermomechanical model of general applicability, free of approximations of laws valid for all matter and mathematically solvable. In previous works we expounded a theory which, by introducing completely new principles including the new law in question (which links density, velocity and thermodynamic pressure), came up with a system of partial differential equations conceivable to constitute the said result. This paper, in front of the need for further theoretical, numerical and experimental checks of this new general model, has the preparatory purpose of theoretically validating the said law in coherence with the continuum mechanics normally consolidated and shared. To this aim, the necessary tools of logic, tensor calculus and mathematical analysis are premised, also circumstantiating laws and principles of the state of the art. It is lastly considered the compatibility of the new law with the current general model and with its best known specifications, and a significant advantage of the new model over the current one is identified in being absent the stress constitutive equations.

Keywords: a new law, continuum mechanics, dynamics.

Indice

1 Introduzione

La meccanica del continuo, scienza fisica per antonomasia poiché riguarda la realtà materiale comunemente percepita dai sensi umani, è priva del suo risultato più importante i.e. un comprovato modello matematico di applicabilità generale per le evoluzioni delle grandezze che descrivono gli aspetti meccanici e termici, privo di errori implicati dall'approssimare leggi (i.e. concetti esattamente validi per tutta la materia), e che sia quindi affetto solo dagli errori, generalmente (usiamo questo avverbio nel senso di solitamente e "nella maggior parte dei casi") riducibili ma a rigore ineliminabili, delle relazioni che specificano e caratterizzano contingenti sostanze.

In precedenti lavori ([77], [78], [79], [81]) esponemmo (*pluralis modestiae*, come nel resto di questo scritto) una teoria che, traducendo concetti fondamentali della termodinamica in relazioni locali (cioè tra funzioni di punti di uno spazio fisico) come sono quelle della meccanica del continuo e introducendo (in modo prevalentemente postulazionale) principi del tutto inediti (quali la legge dinamica oggetto di questo scritto, la formulazione del primo principio della termodinamica, le espressioni della energia totale e del calore di attrito), pervenne a un sistema di equazioni alle derivate parziali, di applicabilità generale, termomeccanico per la presenza di grandezze quali temperatura, pressione termodinamica, densità e velocità, risolvibile in quanto costituito da tante funzioni incognite in altrettante equazioni indipendenti, privo di approssimazioni di leggi, e quindi ipotizzabile per costituire l'anzidetto mancante risultato.

Tuttavia, a prescindere dalla necessità di verificare tale nuovo modello generale che potrà costituire impegni futuri, questo lavoro ha lo scopo preparatorio di dimostrare, per mezzo di deduzioni basate su fondamenti consolidati e condivisi, la nuova legge (affermata per la prima volta in [79] ed espressa da (80)) che lega densità, velocità e pressione termodinamica nel generico punto del mondo materiale.

A tale fine sono estesamente premessi i necessari strumenti di logica, calcolo tensoriale e analisi matematica, è dettagliatamente esposta la rappresentazione concettuale della realtà materiale (uno spazio euclideo, come pure lo spaziotempo che ne è la specificazione quadrimensionale dotata di tre coordinate volumiche e una temporale, e per analogia anche la materia, sono interpretati come insiemi di definizione discreti di funzioni analitiche dividendoli in insiemi infiniti di elementi infinitesimi cui sono associati singoli valori numerici), sono accuratamente circostanziate leggi e principi dello stato dell'arte. Nel contesto così costituito, le argomentazioni che conducono alla nuova legge sono state sviluppate attraverso elaborazioni sistematiche e coerenti di definizioni e idee originali conseguenti da attente riflessioni.

Infine, dopo aver considerato l'attuale modello generale della meccanica del continuo, i più noti modelli che lo specificano e la compatibilità di tali modelli con la nuova legge, sono previsti rilevanti miglioramenti apportati dal nuovo modello generale rispetto quello attuale, in conseguenza degli errori di modellatura del mondo materiale peculiarmente rilevanti e causati nel secondo dalle equazioni costitutive che legano tensioni e deformazioni.

2 Cognizioni preliminari

2.1 Logica

Per la logica sulla quale è basata la seguente esposizione, facciamo specifico riferimento alle sezioni 2 di [2] e 2.1 di [22].

Una proposizione è una sequenza di simboli grafici, può avere o non uno o più significati, e quindi può essere o non una cognizione ulteriore alla sua mera esistenza grafica. È trascurato ogni accidentale significato falso di una proposizione.

Una cognizione è qualificata come implicita o sottintesa, per dire che nel seguito è valida anche se non riaffermata ma solo se compatibile in quanto non contraddetta. Chiamiamo *default*, o di *default*, una impostazione predefinita e implicitamente sottintesa in assenza di precisazione.

Un oggetto è identificato dall'insieme di tutte le sue proprietà. Un nome è una proposizione che riferisce e rappresenta un oggetto, e che attribuisce a esso le proprietà indicate dai suoi eventuali significati. I nomi presenti in una argomentazione relazionano le proprietà relazionabili, i.e. contingentemente pertinenti, da essi indicate.

Una quantità (o grandezza) è un oggetto riferito da un nome che gli attribuisce come proprietà un numero che è chiamato valore numerico o solo valore. Per *default* ogni numero è positivo e quindi è positivo il valore di *default* di ogni grandezza.

Una $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ afferma i seguenti concetti inerenti A e B: sono due nomi di uno stesso oggetto; sono equivalenti nel senso di mutua sostituibilità per cui uno può sostituire l'altro, ma solo se il risultato non è né ambiguo né erroneo come potrebbe accadere se inficiato da impossibile relazionalità tra proprietà indicate dal significato dei nomi. Quindi per dedurre un certo risultato da una $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ è necessario che nell'inerente argomentazione sussista la condizione costituita dall'essere correttamente relazionabili le proprietà indicate dai nomi. Attribuiamo a "i.e." lo stesso significato di $\equiv$.

Essendo $\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ e $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$ due proposizioni, intendiamo

$\{\mathcal{P}_{\mathrm{A}} \| \mathcal{P}_{\mathrm{B}}\} \equiv$ "$\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ sottoposto alla condizione $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$" $\equiv$ "$\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ di cui $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$" $\equiv$ "$\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ dove $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$",

e, con riferimento a (3) di [2],

$\{\mathcal{P}_{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{B}}\} \equiv \{\mathcal{P}_{\mathrm{B}} \Leftarrow \mathcal{P}_{\mathrm{A}}\} \equiv \{\mathcal{P}_{\mathrm{B}}; \forall \mathcal{P}_{\mathrm{A}}\} \equiv$ "da $\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ segue $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$" $\equiv$ "$\mathcal{P}_{\mathrm{A}}$ implica $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$"

Le proprietà degli insiemi usate in questo scritto sono precisate in sezione 2 di [2]. Intendendo $\{ş_{m}; m=1,\cancel{m}\} \equiv \{ş_{1},ş_{2},\ldots ş_{\cancel{m}}\}$ (e $\{m=1,\cancel{m}\} \equiv \{m; m=1,\cancel{m}\}$), una sequenza e un insieme, entrambi costituiti da $\cancel{m}$ elementi, sono rispettivamente indicati $(ş_{m}; m=1,\cancel{m})$ e $\{ş_{m}; m=1,\cancel{m}\}$. Una sequenza è anche un insieme e può essere quindi trattata come tale.

Diciamo che B è una specificazione di A per significare che B ha tutte le compatibili proprietà di A. Indichiamo $\{ş \| \mathcal{P}\}$ un insieme i cui elementi sono tutte le differenti specificazioni di ş contestualmente possibili quando sussiste la condizione costituita dalla proposizione $\mathcal{P}$. Poniamo

$Æ\langle \underline{A} \,/\, B \,/\, C\rangle \equiv \{\{ş \,\|\, ş \in \underline{A}\}$ è°una specificazione di B di cui C}

dove $/\,C$ può essere assente causando così l'assenza di "di cui C".

Poniamo

$\{\text{da: } A_1; A_2; \ldots; A_{\cancel{m}};\ \text{segue } B_0 ▫\square_1▫ B_1 ▫\square_2▫ B_2 \ldots ▫\square_{\cancel{m}}▫ B_{\cancel{m}} ▫\square_{\cancel{m}+1}▫ B_{\cancel{m}+1} \ldots ▫\square_{\cancel{m}+\cancel{n}}▫ B_{\cancel{m}+\cancel{n}}\} \equiv$

$\{A_1 \Rightarrow \{B_0 ▫\square_1▫ B_1\}; A_2 \Rightarrow \{B_1 ▫\square_2▫ B_2\}; \ldots; A_{\cancel{m}} \Rightarrow \{B_{\cancel{m}-1} ▫\square_{\cancel{m}}▫ B_{\cancel{m}}\}\}$

dove: ognuno dei $\{▫\square_1, ▫\square_2▫, \ldots, ▫\square_{\cancel{m}+\cancel{n}}\}$ è un generalmente diverso simbolo relazionale, come per esempio uno dei $\{\equiv, \not\equiv, =, \neq\}$; $\{▫\square_{\cancel{m}+1}▫ B_{\cancel{m}+1} \ldots ▫\square_{\cancel{m}+\cancel{n}}▫ B_{\cancel{m}+\cancel{n}}\}$ può essere assente e se è presente la sua validità è evidente; ognuno dei $\{A_1, A_2, \ldots, A_{\cancel{m}}\}$ è sostituito dal simbolo þ quando il corrispondente elemento di $\{\{B_0 ▫\square_1▫ B_1\}, \{B_1 ▫\square_2▫ B_2\}, \ldots, \{B_{\cancel{m}-1} ▫\square_{\cancel{m}}▫ B_{\cancel{m}}\}\}$ è considerato evidente o la sua validità è evidenziata dopo o costituisce una nuova definizione.

Intendiamo $ş\langle ş\rangle \equiv ş_ş$, $\wedge \equiv$ AND $\equiv$ "congiunzione", $\dot\vee \equiv$ XOR $\equiv$ "disgiunzione esclusiva".

2.2 Tensori in uno spazio euclideo

Un insieme infinito è costituito da un numero illimitatamente grande di elementi. Una direzione è l'evidente proprietà comune a un insieme infinito di rette parallele. Una direzione e uno dei suoi due versi costituiscono una direzione orientata. Una retta è orientata in quanto ne è definito il verso nel quale è crescente una ascissa. Una retta orientata ha l'evidente propria direzione orientata che è la stessa per un insieme infinito di rette parallele e ugualmente orientate.

Un punto è un oggetto geometrico privo di estensione, che non occupa spazio e non può essere diviso in parti. In coerenza con ciò linee e superfici non hanno spessore. Uno spazio euclideo ɨ-dimensionale $\mathcal{E}_{ɨ}$ è un insieme infinito di punti adiacenti in corrispondenza biunivoca con l'insieme di ogni diversa ɨ-pla (ossia sequenza di ɨ elementi) di numeri reali. Tale adiacenza sarà specificata come distanze minime illimitatamente piccole, e riguarda linee e superfici analogamente a rispettivi $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$.

Un $\mathcal{E}_{ɨ}$ è dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale i cui ɨ assi coordinati sono altrettante rette reciprocamente ortogonali, orientate dal misurarvi le rispettive coordinate $\underline{x}$ di cui $\underline{x} \equiv (x_i;\ i=1,ɨ)$ e $-\infty < x_i < \infty$, e che si intersecano nel punto origine dove tutte le $\underline{x}$ hanno valore nullo. In base alla detta corrispondenza biunivoca, il nome $\underline{x}$ è usato anche per riferire il punto corrispondente. La i-esima direzione è la direzione orientata dell'i-esimo asse coordinato.

Un tensore **A**, di ordine o e inerente $\mathcal{E}_{ɨ}$, è costituito da $ɨ^{o}$ componenti, la generica delle quali è indicata $A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle \ldots i\langle o\rangle}$ di cui $i_o \in \{i=1,ɨ\}$ con $o \in \{ş=1,o\}$. Una $A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle \ldots i\langle o\rangle}$ è uno scalare, i.e. un numero reale, associato alla o-pla costituita dalle particolari o direzioni coordinate indicate da $(i_1, i_2, \ldots i_o)$, essendo tale o-pla una sequenza di o elementi scelti arbitrariamente tra quelli di $\{i=1,ɨ\}$ ed essendo quindi una disposizione con ripetizione di classe o di ɨ oggetti. Per un tale tensore, oltre la notazione diretta **A**, abbiamo anche la notazione indiciale $A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle \ldots i\langle o\rangle}$ nel senso di

$$\mathbf{A} \equiv A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle \ldots i\langle o\rangle} \tag{1}$$

dove ogni eventuale grandezza presente nel nome **A** è trattata come una costante rispetto i $\{i_1,i_2...i_{\mathfrak{o}}\}$ e un eventuale indice a denominatore è considerato più a destra di uno a numeratore.

Chiamando **B** un tensore di cui $\mathbf{B} \equiv B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle}$, l'addizione di **A** e **B** è indicata **A**+**B** e, solo se $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$, equivale al tensore $\mathbf{C}_S$ come è mostrato da

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} \equiv A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle}+B_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle} \equiv C_{Si\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle} \equiv \mathbf{C}_S \tag{2}$$

Il prodotto diretto o tensoriale o esterno di **A** e **B** è indicato **AB** e equivale al tensore $\mathbf{C}_D$ come è mostrato da

$$\mathbf{AB} \equiv \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} \equiv A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle}B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle} \equiv C_{Di\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle} \equiv \mathbf{C}_D \tag{3}$$

Il prodotto interno di **A** e **B** è indicato $\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$, e, solo se $\mathfrak{o} > 0$ e $\mathfrak{p} > 0$, equivale al tensore $\mathbf{C}_I$ come è mostrato da

$$\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}-1\rangle i}B_{im\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle} \equiv C_{Ii\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}-1\rangle m\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle} \equiv \mathbf{C}_I \tag{4}$$

di cui la $\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle \equiv \mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$ che, come vedremo, è posta in coerenza con (14). Un $\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$ è definito ponendo uguali a uno stesso indice (diverso da quelli già presenti) i due indici più vicini tra quelli di $A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle ... i\langle \mathfrak{o}\rangle}$ e $B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle ... m\langle \mathfrak{p}\rangle}$ e poi sommando gli ɨ addendi corrispondenti agli altrettanti valori di tale stesso indice.

In una espressione sono considerati prima prodotti diretti poi i prodotti interni e poi le somme.

Un vettore è un segmento rettilineo definito dalla sua direzione orientata (i.e. da una direzione in quanto può giacere su una qualsiasi retta elemento di un suo insieme infinito di rette parallele, e da uno dei due versi di tale direzione in quanto i suoi punti estremi sono distinti come origine e destinazione i.e. come iniziale e finale) e dalla sua lunghezza i.e. magnitudine. Essendo quindi la magnitudine di un vettore una grandezza non negativa, è indicata dal nome di tale vettore tra delimitatori uguali a $|$, e.g. la magnitudine di un vettore $\mathbf{a}$ è indicata $|\mathbf{a}|$ di cui $|\mathbf{a}| \geq 0$.

Nel sistema di riferimento di $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$, una direzione orientata è individuata da ɨ coseni direttori, che sono gli stessi per ogni elemento di un infinito insieme di rette parallele orientate, il i-esimo dei quali è il coseno dell'angolo convesso tra un tale elemento e il i-esimo asse coordinato, essendo tale angolo quello di un ruotare, meno di 180°, uno o l'altro nel loro piano comune fino ad avere entrambi la stessa direzione orientata.

Inoltre, chiamando $(\hat{e}_i;\ i=1,\text{ɨ})$ i coseni direttori che individuano la direzione orientata di $\mathbf{a}$, per la nota proprietà di un triangolo rettangolo abbiamo $\mathbf{a}_i = |\mathbf{a}|\hat{e}_i$ la cui $\mathbf{a}_i$ verifica l'espressione $|\mathbf{a}| = (\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i^2)^{0.5}$ di una distanza euclidea. Pertanto $\mathbf{a}$ è in corrispondenza biunivoca con i numeri reali $(\mathbf{a}_i;\ i=1,\text{ɨ})$, poiché magnitudine e direzione orientata di $\mathbf{a}$ consentono di determinare $\mathbf{a}_i$ per mezzo di $\mathbf{a}_i = |\mathbf{a}|\hat{e}_i$, e viceversa i $(\mathbf{a}_i;\ i=1,\text{ɨ})$ consentono di determinare $\mathbf{a}$ per mezzo delle

$$|\mathbf{a}| = (\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i^2)^{0.5} \qquad\qquad \hat{e}_i = \mathbf{a}_i/|\mathbf{a}| \tag{5}$$

In base a tale corrispondenza biunivoca poniamo $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_i$ per cui un vettore è un tensore di ordine 1.

Un versore è un vettore che ha magnitudine unitaria. Chiamando $\hat{\mathbf{e}}$ il versore che ha la stessa direzione orientata di $\mathbf{a}$, abbiamo $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$ e i coseni direttori di $\hat{\mathbf{e}}$ sono gli stessi ($\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}$; $\mathrm{i}=1,\text{ɨ}$) di $\mathbf{a}$. Ciò e l'essere il i-esimo coseno direttore di un vettore uguale al rapporto tra la sua i-esima componente e la sua magnitudine danno luogo a $\hat{\mathbf{e}} \equiv \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}$, conseguendo che il i-esimo coseno direttore di un versore è anche la sua i-esima componente.

Ciò, il chiamare $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ il versore che ha la stessa direzione orientata del i-esimo asse coordinato (per cui i ($\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$; $\mathrm{i}=1,\text{ɨ}$) sono i versori coordinati del sistema di riferimento) e l'essere i coseni direttori di tale asse i ($\delta_{\mathrm{i}i}$; $i=1,\text{ɨ}$) definiti da

$$\{\delta_{\mathrm{mn}} = 1;\ \forall \mathrm{m}=\mathrm{n}\} \qquad \{\delta_{\mathrm{mn}} = 0;\ \forall \mathrm{m}\neq\mathrm{n}\} \tag{6}$$

con δ_{mn} il delta di Kronecker, portano $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \equiv \delta_{\mathrm{i}i}$.

In base a (6) e $\text{Æ}\langle(\mathbf{a}_{\mathrm{i}},\mathbf{a}),(\delta_{i\mathrm{i}},\hat{\boldsymbol{e}}_i)\,/\,(A_{\mathrm{i}\langle 1\rangle\mathrm{i}\langle 2\rangle\ldots\mathrm{i}\langle\text{ȯ}\rangle},\mathbf{A})\,/\,(1)\rangle$ abbiamo

$$\mathbf{a}_{\mathrm{i}} = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i\delta_{i\mathrm{i}} \qquad \mathbf{a} = \Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} \tag{7}$$

come pure, per $\text{ȯ} = 2$,

$$A_{\mathrm{i}i} = \Sigma_{m=1,\text{ɨ}}\Sigma_{\mathrm{m}=1,\text{ɨ}}A_{\mathrm{m}m}\delta_{\mathrm{mi}}\delta_{mi} \qquad \mathbf{A} = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}A_{\mathrm{i}i}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

Da (7) segue $-\mathbf{a} = \Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}-\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}}$ che, per $\text{Æ}\langle-\mathbf{a},-\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\,/\,\mathbf{a},\mathbf{a}_{\mathrm{i}})\,/\,(7)\rangle$, dà luogo a $-\mathbf{a} \equiv -\mathbf{a}_{\mathrm{i}}$ da cui si deduce che $-\mathbf{a}$ ha, rispetto ad $\mathbf{a}$, uguali magnitudine e direzione, e verso opposto. Perciò $\mathbf{a}$ e $-\mathbf{a}$ sono detti uguali ed opposti.

Da: (7); $|\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a}_{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}$; $\text{Æ}\langle\hat{\mathbf{e}},\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}\,/\,\mathbf{a},\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\,/\,(7)\rangle$; segue

$$|\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a} = \Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}|\mathbf{a}|^{-1}\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} = \Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{i}} = \hat{\mathbf{e}}$$

che mostra $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{e}}$.

Ponendo

$$\{\varpi_{\text{ş}} = \text{ş}/|\text{ş}|;\ \forall\text{ş}\neq 0\} \qquad \{\varpi_{\text{ş}} = 0;\ \forall\text{ş}=0\} \tag{8}$$

e intendendo a uno scalare e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}}$ un versore di cui $\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}} \equiv \hat{\mathrm{e}}_{\mathsf{a}_{\mathrm{i}}}$, abbiamo

$$\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}} = |\mathsf{a}|\varpi_{\mathsf{a}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}} = |\mathsf{a}|\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathsf{a}} \tag{9}$$

di cui $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathsf{a}} = \varpi_{\mathsf{a}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}}$ i.e. $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathsf{a}} \equiv \hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}} \dot{\vee} -\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}}$ e quindi $|\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathsf{a}}| = 1$. Questa e (9) mostrano $\text{Æ}\langle\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}},|\mathsf{a}|\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathsf{a}}\,/\,\mathbf{a},|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{e}}\rangle$ per cui il vettore $\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}}$ ha magnitudine $|\mathsf{a}|$ e magnitudine con segno a. Infatti, da: $\text{Æ}\langle\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}},\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}_{\mathrm{i}}}\,/\,\mathbf{a},\mathbf{a}_{\mathrm{i}}\,/\,(5)\rangle$; $\Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}^2 = 1$ che si deduce da (5); segue

$$|\mathsf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathsf{a}}| = |\mathsf{a}|(\Sigma_{\mathrm{i}=1,\text{ɨ}}\hat{\mathrm{e}}_{\mathsf{a}_{\mathrm{i}}}{}^2)^{0.5} = |\mathsf{a}| \tag{10}$$

Un vettore è applicato se è specificato il suo punto di applicazione i.e. la sua origine. Il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, di cui $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_i$, è lo scalare indicato $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$ e definito da

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} \equiv |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \tag{11}$$

dove θ è l'angolo (minore di 180°) compreso tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ quando sono applicati in uno stesso punto. Tale prodotto è commutativo ($\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{b}\bullet\mathbf{a}$) e distributivo rispetto alla somma. La proiezione di $\mathbf{a}$ su un versore $\hat{\mathbf{e}}$ (i.e. sulla direzione orientata di tale $\hat{\mathbf{e}}$) è definita come $(\hat{\mathbf{e}}\bullet\mathbf{a})\hat{\mathbf{e}}$ ed ha quindi la magnitudine con segno $\hat{\mathbf{e}}\bullet\mathbf{a}$.

Due versori $\hat{\mathbf{e}}_N$ e $\hat{\mathbf{e}}_T$, di cui $\hat{\mathbf{e}}_N\bullet\hat{\mathbf{e}}_T = 0$, sono quelli coordinati di un sistema di riferimento bidimensionale dove $\mathbf{a}$, se giace sullo stesso piano di $\hat{\mathbf{e}}_N$ e $\hat{\mathbf{e}}_T$, è espresso, analogamente a (7), da

$$\mathbf{a} = (\hat{\mathbf{e}}_N\bullet\mathbf{a})\hat{\mathbf{e}}_N+(\hat{\mathbf{e}}_T\bullet\mathbf{a})\hat{\mathbf{e}}_T \tag{12}$$

le cui $\hat{\mathbf{e}}_N\bullet\mathbf{a}$ e $\hat{\mathbf{e}}_T\bullet\mathbf{a}$ sono le componenti di $\mathbf{a}$ secondo $\hat{\mathbf{e}}_N$ e $\hat{\mathbf{e}}_T$, come una $\mathbf{a}_i$ è la componente di $\mathbf{a}$ secondo x_i i.e. secondo $\hat{e}_i$.

Da $\text{Æ}\langle \mathbf{a}\hat{e}_i,\mathbf{b}\hat{e}_{i},\theta_{i\mathit{i}} \,/\, \mathbf{a},\mathbf{b},\theta \,/\, (11)\rangle$; $\text{Æ}\langle \mathbf{a}\hat{e}_i,\mathbf{b}\hat{e}_{\mathit{i}} \,/\, \mathbf{a}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{a}} \,/(10)\rangle$, $\varpi_{ş} = |ş|/ş$; $\varpi_{\mathbf{a}}\varpi_{\mathbf{b}}\cos\theta_{i\mathit{i}} = \delta_{i\mathit{i}}$; segue

$$\mathbf{a}\hat{e}_i\bullet\mathbf{b}\hat{e}_{\mathit{i}} \equiv |\mathbf{a}\hat{e}_i|\,|\mathbf{b}\hat{e}_{\mathit{i}}|\cos\theta_{i\mathit{i}} = \mathbf{a}\mathbf{b}\varpi_{\mathbf{a}}\varpi_{\mathbf{b}}\cos\theta_{i\mathit{i}} = \mathbf{a}\mathbf{b}\delta_{i\mathit{i}} \tag{13}$$

Da: (7); distributività del prodotto scalare rispetto la somma; (13); (4); segue

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = (\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i\hat{e}_i)\bullet(\Sigma_{\mathit{i}=1,\text{ɨ}}\mathbf{b}_{\mathit{i}}\hat{e}_{\mathit{i}}) = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\Sigma_{\mathit{i}=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i\hat{e}_i\bullet\mathbf{b}_{\mathit{i}}\hat{e}_{\mathit{i}} = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i \equiv \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle \tag{14}$$

per cui si pone la $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} \equiv \langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle$ inerente (4).

Il prodotto diretto $\mathbf{ab}$ è il tensore di ordine 2 detto diade o prodotto diadico o prodotto tensoriale. Il gradiente e la divergenza di $\mathbf{A}$ sono espressi da $\nabla\mathbf{A}$ e $\nabla\bullet\mathbf{A}$, il cui operatore ∇ (detto "nabla" o "del") è il vettore simbolico definito da $\nabla \equiv \partial/\partial x_i$ di cui $(\partial/\partial x_i)ş \equiv \partial ş/\partial x_i$. Per $\text{ɵ} = 0$ e $\mathbf{A} \equiv A$, $\nabla\mathbf{A} \equiv \partial A/\partial x_i$ e $\nabla\bullet\mathbf{A}$ non è definita; per $\text{ɵ} = 1$, $\nabla\mathbf{A} \equiv \partial A_{\mathit{i}}/\partial x_i$ e $\nabla\bullet\mathbf{A} \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial A_i/\partial x_i$; per $\text{ɵ} = 2$, $\nabla\mathbf{A} \equiv \partial A_{i\langle 2\rangle i\langle 3\rangle}/\partial x_{i\langle 1\rangle}$ e $\nabla\bullet\mathbf{A} \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial A_{i\mathit{i}}/\partial x_i$.

Quindi $\nabla\mathbf{A}$ e $\nabla\bullet\mathbf{A}$ sono due tensori il cui ordine è rispettivamente maggiore e minore di 1 rispetto quello di $\mathbf{A}$. Il ∇ ha significato solo come membro di espressioni quali $\nabla\mathbf{A}$ e $\nabla\bullet\mathbf{A}$.

In relazione a (2) abbiamo

$$\nabla(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \equiv \partial(A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}+B_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle})/\partial x_i = \partial A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}/\partial x_i+\partial B_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}/\partial x_i \equiv \nabla\mathbf{A}+\nabla\mathbf{B}$$

$$\nabla\bullet\mathbf{A}+\nabla\bullet\mathbf{B} \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}/\partial x_i+\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial B_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}/\partial x_i = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial C_{Sii\langle 2\rangle\ldots i\langle \text{ɵ}\rangle}/\partial x_i \equiv \nabla\bullet\mathbf{C}_S \equiv \nabla\bullet(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \tag{15}$$

In relazione a (3) deduciamo

$$\nabla(\mathbf{AB}) \equiv \partial A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle} B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i =$$

$$A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle}\partial B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i + B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}\partial A_{i\langle 1\rangle i\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle}/\partial x_i \equiv \mathbf{A}\nabla\mathbf{B}+\mathbf{B}\nabla\mathbf{A}$$

$$\nabla\bullet(\mathbf{AB}) \equiv \nabla\bullet\mathbf{C}_D \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial C_{Dii\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle} B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i =$$

$$\Sigma_{i=1,\text{ɨ}} A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle}\partial B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i + B_{m\langle 1\rangle m\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle\mathfrak{o}\rangle}/\partial x_i \equiv \nabla\mathbf{B}\bullet\mathbf{A}+\mathbf{B}\nabla\bullet\mathbf{A}$$

e, essendo A uno scalare,

$$\nabla\bullet\mathbf{B}A = \nabla\bullet A\mathbf{B} \equiv \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial AB_{im\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i =$$

$$A\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}\partial B_{im\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}/\partial x_i + \Sigma_{i=1,\text{ɨ}} B_{im\langle 2\rangle\ldots m\langle\mathfrak{p}\rangle}\partial A/\partial x_i \equiv A\nabla\bullet\mathbf{B}+\nabla A\bullet\mathbf{B} \qquad (16)$$

2.3 Analisi matematica

Una grandezza è una proprietà di un oggetto in quanto lo descrive specificamente per mezzo delle sue proprietà, e in particolare è uno scalare se queste sue proprietà consistono nel solo valore numerico o è un vettore applicato se tali proprietà sono magnitudine, direzione, verso e punto di applicazione.

È chiamato $\underline{\mathfrak{R}}\langle y\rangle$ l'insieme dei diversi valori che può avere la grandezza y. Una tale y è una costante o una variabile, rispettivamente se $\underline{\mathfrak{R}}\langle y\rangle$ è costituito da uno o più elementi.

Alle $\cancel{m}$ grandezze $\underline{y}$, di cui $\underline{y} \equiv (y_m;\ m=1,\cancel{m})$, è associato l'insieme $\underline{\mathfrak{R}}\langle\underline{y}\rangle$ di tutte le differenti $\cancel{m}$-ple dei possibili valori di tali grandezze.

È usato uno stesso nome per una parte di $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$ e una misura (dell'estensione, come è implicito) di tale parte.

2.3.1 Funzioni, limiti e derivate.

Una funzione analitica $f(\underline{x})$ è una formula matematica, le cui grandezze sono trattate tutte come costanti tranne le sue variabili indipendenti $\underline{x}$, e che in corrispondenza di ogni ɨ-pla di valori delle $\underline{x}$ ha uno o più valori numerici nei rispettivi casi che è monodroma (come è sottinteso) o polidroma.

L'insieme di definizione di $f(\underline{x})$ è $\underline{\mathfrak{I}}\langle f(\underline{x})\rangle$ ed è costituito da ogni diversa ɨ-pla di valori delle $\underline{x}$ alla quale corrisponde univocamente l'inerente valore di $f(\underline{x})$. Le $\underline{x}$ sono dette indipendenti in conseguenza della loro reciproca indipendenza, che si indica con $\mathbb{I}\langle\underline{x}\rangle$ per significare che ognuna può avere ogni suo valore presente in $\underline{\mathfrak{I}}\langle f(\underline{x})\rangle$ a prescindere da quali particolari valori hanno contingentemente le restanti ɨ-1. La sostituzione in $f(\underline{x})$ di alcune delle $\underline{x}$ con altre variabili (o funzioni, nel cui caso si ha una funzione composta) implica generalmente un diverso insieme di definizione.

Il limite di A per B che tende a C (indicandosi un tale tendere con $\mathsf{B}\to\mathsf{C}$) è l'oggetto cui si avvicina sempre più A quando B si avvicina sempre più a C subordinatamente alla condizione $\mathsf{B}\not\equiv\mathsf{C}$, è indicato $\lim_{\mathsf{B}\to\mathsf{C}}\mathsf{A}$, è definito se ad ogni B corrisponde un solo A. Quindi un limite è soltanto concettuale e non esiste nel reale mondo materiale poiché consiste in un illimitato divenire.

Coerentemente con ciò, il limite di $f(\underline{x})$ per $\underline{x}$ che tende al punto $\underline{x}_0$ di $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$ ha la fondamentale definizione analitica (e.g. (2.4.2.6) di [22]) secondo cui una

$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}\langle 0\rangle} f(\underline{x}) = L$

equivale a

$\{|f(\underline{x})-L| < \varepsilon;\ \forall\varepsilon > 0,\ \forall\{\underline{x}\,\|\,\underline{x} \neq \underline{x}_0\} \in \underline{I} \cap \Im\langle f(\underline{x})\rangle\}$

dove $\underline{I}$ è un intorno di $\underline{x}_0$.

Con riferimento ai noti concetti inerenti le quantità illimitatamente piccole e grandi dette infinitesimi e infiniti (e alla dualità di tali denominazioni), è implicito che: un infinitesimo di un certo ordine non è tale in assoluto, ma solo in quanto è relazionato a un infinitesimo di ordine 0 costituito da una grandezza finita i.e. limitata; un infinitesimo è di ordine 1; gli infinitesimi hanno lo stesso ordine; un oggetto è detto infinitesimo in quanto è tale una sua misura; un infinitesimo di ordine superiore, i.e. maggiore di 1, è trascurabile; se a e b sono infinitesimi di ordine o_{a} e o_{b}, a è un infinitesimo di ordine $o_{\mathsf{a}}-o_{\mathsf{b}}$ rispetto a b.

Una $f(\underline{x}) \in \mathsf{C}^0(\underline{x}_0)$ afferma la continuità di $f(\underline{x})$ nel punto $\underline{x}_0$ ed ha l'espressione

$$\{f(\underline{x}) \in \mathsf{C}^0(\underline{x}_0)\} \equiv \{\lim_{\underline{x}\to\underline{x}\langle 0\rangle} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) \neq \pm\infty\} \tag{17}$$

il cui secondo membro è coerente con l'essere $f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)$ infinitesima nel suo limite per $\underline{x} \to \underline{x}_0$.

Ogni funzione è sottintesa continua in ogni punto del suo insieme di definizione, poiché si suppone che ogni eventuale punto di non continuità è eliminabile per mezzo delle usuali tecniche dell'analisi matematica. Essendo quindi implicita, per ogni funzione, la specificazione del secondo membro di (17), abbiamo

$$\{f_{\mathrm{A}}(\underline{a}) = f_{\mathrm{B}}(\underline{b})\} \equiv \{\lim_{\underline{a}\to\underline{a}} f_{\mathrm{A}}(\underline{a}) = \lim_{\underline{b}\to\underline{b}} f_{\mathrm{B}}(\underline{b})\} \tag{18}$$

senza la quale $f_{\mathrm{A}}(\underline{a}) = f_{\mathrm{B}}(\underline{b})$ vale per $f_{\mathrm{A}}(\underline{a})$ e $f_{\mathrm{B}}(\underline{b})$ intesi come due valori dedotti dai soli due punti $\underline{a}$ e $\underline{b}$, e non dedotti invece dalla definizione di un limite i.e. trascurando proprio tali due valori ed usando invece quelli corrispondenti ai due insiemi infiniti di punti rispettivamente implicati dagli intorni di $\underline{a}$ e $\underline{b}$.

Una $y = f(\underline{x})$ esprime la grandezza y in funzione delle $\underline{x}$ in quanto attribuisce il valore di $f(\underline{x})$ alla variabile dipendente y, equivale a dire che y è espressa da $f(\underline{x})$, ed è sufficiente per dire che y è funzione delle $\underline{x}$. Una $\underline{y}(\underline{x})$ implica $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$ di cui $\{\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})\} \equiv (y_m = y_m(\underline{x});\ m=1,\cancel{m})$, e quindi $f(\underline{x})$ implica $f = f(\underline{x})$. Una $f(\underline{x})$ è detta costante se ha uno stesso valore comunque varino le variabili indipendenti.

I Δy, δy e il differenziale totale dy sono tre differenze tra due valori di y i.e. variazioni di questa grandezza, ma Δy è una quantità finita mentre δy e dy sono infinitesimi in quanto definiti da $\delta y = \lim_{\Delta y\to 0}\Delta y$ e, solo se $y = f(\underline{x})$, da

$$dy \equiv df(\underline{x}) \equiv \Sigma_{i=1,\cancel{i}}\,\partial f(\underline{x})/\partial x_i\,dx_i \tag{19}$$

di cui $dx_i \equiv \delta x_i$ e dove $\partial f(\underline{x})/\partial x_i$ è la derivata parziale, di $f(\underline{x})$ rispetto x_i, a sua volta definita, come limite di un rapporto incrementale, da

$$\partial f(\underline{x})/\partial x_i \equiv \partial y/\partial x_i \equiv \lim_{\Delta x\to 0}((f(x_1,\dots,x_i+\Delta x,\dots,x_{\cancel{i}})-f(\underline{x}))/\Delta x) \tag{20}$$

dove le $\underline{x}-\{x_i\}$ sono trattate come costanti, non abbiamo il vincolo

$$(x_1,\dots,x_i+\Delta x_i,\dots,x_{\cancel{i}}) \in \Im\langle f(\underline{x})\rangle \tag{21}$$

poiché la sostituzione di x_i con $x_i+\Delta x_i$ è un puro artifizio matematico finalizzato alla definizione (20), e la cui seconda equivalenza ha senso solo in quanto è posta la $y = f(\underline{x})$.

Queste definizioni, nel caso di $y = f(\underline{x})$ specificata come $y = f(x)$ di cui $x \equiv \{\underline{x} \,\|\, \cancel{i} = 1\}$, sono specificate dalle

$$dy \equiv df(x) \equiv f'(x)dx \qquad\qquad dx \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$$

$$df(x)/dx \equiv f'(x) \equiv dy/dx \equiv \lim_{\Delta x\to 0}((f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x) \tag{22}$$

e sono coerenti con $\lim_{x\to x\langle 0\rangle}x \equiv x_0 \pm dx$.

Una $\partial f_C(\underline{y})/\partial x_i$ è definita solo se esiste una $\underline{y}(\underline{x})$. Infatti, da: $\underline{y}(\underline{x})$; regola di derivazione di una funzione composta; segue

$$\partial f_C(\underline{y})/\partial x_i = \partial f_C(\underline{y}(\underline{x}))/\partial x_i = \Sigma_{m=1,\cancel{m}}(\partial f_C(\underline{y})/\partial y_m)(\partial y_m(\underline{x})/\partial x_i)$$

che per $\cancel{i} = 1$ diviene

$$df_C(\underline{y})/dx = df_C(\underline{y}(x))/dx \equiv f_C'(\underline{y}(x)) = \Sigma_{m=1,\cancel{m}}y_m'(x)\partial f_C(\underline{y})/\partial y_m \tag{23}$$

2.3.2 La discretizzazione di uno spazio euclideo

Essendo $\underline{A} \times \underline{B}$ il prodotto cartesiano dei due insiemi $\underline{A}$ e $\underline{B}$, abbiamo

$$\Pi_{k=1,\cancel{k}}\underline{A}_k \equiv \underline{A}_1 \times \underline{A}_2 \times \dots \times \underline{A}_{\cancel{k}} \qquad\qquad \underline{A}^{\cancel{k}} \equiv \Pi_{k=1,\cancel{k}}\underline{A}$$

dove i $\{\{\underline{A}_k;\ k=1,\cancel{k}\},\underline{A}\}$ sono $\cancel{k}+1$ insiemi ed è applicabile la proprietà associativa.

Un ipercubo $\cancel{i}$-dimensionale è chiamato $\cancel{i}$-cubo ed è punto, segmento rettilineo, quadrato, cubo, ipercubo per $\cancel{i} = 0$, $\cancel{i} = 1$, $\cancel{i} = 2$, $\cancel{i} = 3$, $\cancel{i} > 3$.

Pure se ogni punto di $\mathcal{E}_{\cancel{i}}$ è di accumulazione per ogni insieme la cui frontiera lo contiene, l'adiacenza tra punti di $\mathcal{E}_{\cancel{i}}$ non può essere contiguità i.e. contatto, poiché, se così fosse, la distanza tra due punti sarebbe nulla e di conseguenza nessuna parte di $\mathcal{E}_{\cancel{i}}$ potrebbe avere estensione in quanto una somma di distanze nulle rimane nulla anche se il numero di addendi è infinito.

Pertanto l'adiacenza tra punti di $\mathcal{E}_{\cancel{i}}$ è intesa, non come contatto, ma come distanza infinitesima del tipo $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x$. Da ciò segue la concreta discretizzazione di tale spazio consistente nell'escludere da esso ogni punto che non appartiene all'insieme dei vertici di uguali ɨ-cubi ognuno specificazione del δV definito da

$$\delta V \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\Pi_{i=1,\text{ɨ}}[x_i,x_i+\Delta x] \equiv \Pi_{i=1,\text{ɨ}}[x_i,x_i+dx_i] \qquad (24)$$

la cui misura $d\underline{x}$ è espressa da $d\underline{x} = \Pi_{i=1,\text{ɨ}}dx_i$ ed è quindi infinitesima di ordine ɨ.

La frontiera di δV è una sua parte costituita da ɨ coppie di (ɨ−1)-cubi quali i $\{\delta A_i,\delta A_{+i}\}$ distanti dx_i nella i-esima direzione e il cui δA_{+i} costituisce anche la frontiera ed è parte del ɨ-cubo infinitesimo δV_{+i} adiacente a δV nel verso di x_i crescente. Sulla frontiera di δV ci sono $2^{\text{ɨ}}$ vertici con $\underline{x}$ quello che ha minimo il valore di ogni coordinata e giace anche su δA_i, e $\text{ɨ}2^{\text{ɨ}-1}$ segmenti rettilinei il cui i-esimo congiunge due vertici nella i-esima direzione. Infatti sulla detta frontiera giacciono $2^{\text{ɨ}-i}\text{Б}_{\text{ɨ}i}$ ($\text{Б}_{\text{ɨ}i}$ coefficiente binomiale) (i−1)-cubi, come si deduce dall'essere δV una specificazione del *parallelotope* (generalizzazione ɨ-dimensionale di un tridimensionale parallelepipedo) in [91].

Pertanto $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$ ha la discretizzazione consistente nel considerarlo diviso in un insieme infinito di elementi che specificano δV, come pure nel convenire, in base a tale condizione, che una $f(\underline{x})$ ha un solo stesso valore associato a δV omogeneamente, i.e. ugualmente in ogni sua parte, e (escludendo il caso che è una funzione costante) ha salti (discontinuità di prima specie) infinitesimi nella sua frontiera. Questa relazione tra $f(\underline{x})$ e δV può essere solo una mera associazione in quanto f non descrive ulteriormente δV oppure può anche essere che f descrive solo una parte della frontiera di δV. Se f descrive δV come una proprietà di questo dovuta alla particolare natura di $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$, allora esso può essere considerato come valore medio di un insieme infinito di infinitesimi di secondo ordine omogeneamente distribuiti in δV in quanto biunivocamente associati a altrettanti punti di questo. Analoghe considerazioni si estendono direttamente a zone (ɨ−n)-dimensionali di $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$.

Da Æ⟨$d\mathbf{x},dx_i$ / $\mathbf{a},\mathbf{a}_i$ / (5),(7)⟩ seguono

$$d\mathbf{x} = \Sigma_{i=1,\text{ɨ}}dx_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \qquad |d\mathbf{x}| = (\Sigma_{i=1,\text{ɨ}}dx_i^2)^{0.5} \qquad (25)$$

con $|d\mathbf{x}|$ la lunghezza della diagonale di δV i.e. la distanza tra $\underline{x}$ e il vertice che ha massimo il valore di ogni coordinata.

2.3.3 Gli integrali

Chiamando $\underline{e}$ delle variabili contingentemente presenti, l'integrale della funzione $g(\underline{x},\underline{e})$, esteso al dominio di integrazione V di cui $V \subseteq \mathcal{E}_{\text{ɨ}}$, è indicato $\int_V g(\underline{x},\underline{e})dV$ di cui

$$dV \equiv \delta V \equiv d\underline{x} \qquad d\underline{x} = \Pi_{i=1,\text{ɨ}}dx_i \qquad \int_V g(\underline{x},\underline{e})dV \equiv \int_V g\,dV \equiv \int_V g(\underline{y},\underline{e})dU \qquad (26)$$

nel cui secondo integrale le variabili indipendenti sono assenti poiché note, e i cui $\underline{y}$ e U sono due nomi arbitrari che non necessitano di definizioni poiché sono sufficienti $g(\underline{x},\underline{e})$ e V per dedurre $(\underline{y},U) \equiv (\underline{x},V)$.

La definizione di $\int_V g(\underline{x},\underline{e})dV$ come limite di una somma per la numerosità degli addendi che tende a infinito (i.e. un numero illimitatamente grande), consente di porre

$\int_{\mathrm{V}} g(\underline{x},\underline{e})d\mathrm{V} \equiv \Sigma_{c=1,\infty}\delta M_c$ (27)

di cui $\delta M_c \equiv g(\underline{x}_c,\underline{e})\delta V_c$ con $Æ\langle\delta V_c \,/\, \delta V\rangle$ e $\underline{x}_c$ il vertice di δV_c che ha minimo il valore di ogni coordinata, $\{\delta V_c;\ c=1,\infty\}$ una decomposizione di V in quanto verifica $\mathrm{V} = \cup_{c=1,\infty}\delta V_c$ e $\{\delta V_a \cap \delta V_b = \varnothing;\ \forall a \neq b\}$, ed essendo quindi δM_c il prodotto tra la misura $d\underline{x}_c$ della porzione infinitesima δV_c di V e il valore di $g(\underline{x},\underline{e})$ in tale porzione.

La (27) evidenzia che un $\int_{\mathrm{V}-V} g d\underline{x}$, di cui $V \subseteq \mathcal{E}_{\text{ɨ}}$, equivale a $\Sigma_{c=1,\infty}\delta M_c$ da cui sono eliminati gli elementi presenti anche nella sommatoria che (analogamente a (27)) esprime un $\int_V g d\underline{x}$. Perciò abbiamo

$\int_{\mathrm{V}-V} g d\underline{x} \equiv \Sigma_{c=1,\infty}\delta \mathit{M}_c$ (28)

di cui $\{\delta \mathit{M}_c;\ c=1,\infty\} \equiv \underline{\mathit{M}} = \underline{\mathrm{M}}-\underline{\mathrm{N}}$, $\underline{\mathrm{M}} \equiv \{\delta M_c;\ c=1,\infty\}$, $\underline{\mathrm{N}} \equiv \{\delta N_c;\ c=1,\infty\}$, $\int_V g d\underline{x} \equiv \Sigma_{c=1,\infty}\delta N_c$.

Da: (27), ultima delle precedenti; eliminare le coppie di elementi uguali rispettivamente presenti nelle due sommatorie, intendere $\{\delta \mathit{N}_c;\ c=1,\infty\} = \underline{\mathrm{N}}-\underline{\mathrm{M}}$; (28); segue

$\int_{\mathrm{V}} g d\underline{x} - \int_V g d\underline{x} \equiv \Sigma_{c=1,\infty}\delta M_c - \Sigma_{c=1,\infty}\delta N_c = \Sigma_{c=1,\infty}\delta \mathit{M}_c - \Sigma_{c=1,\infty}(\delta \mathit{N}_c) = \int_{\mathrm{V}-V} g d\underline{x} - \int_{V-\mathrm{V}} g d\underline{x}$ (29)

3 La materia e lo spazio fisico

Si usa $\mathfrak{m}$ come nome di tutta la materia. Il divenire temporale è il trascorrere del tempo. Il mondo materiale è $\mathfrak{m}$ nel divenire temporale; lo spazio volumico $\mathcal{V}$ è il luogo di $\mathfrak{m}$; $\mathcal{V}$ nel divenire temporale è il luogo del mondo materiale i.e. lo spazio fisico quadrimensionale $\mathcal{S}$ i.e. lo spaziotempo i.e. il *continuum* spazio-temporale divisibile in parti illimitatamente piccole.

Infatti consideriamo $\mathcal{V}$ e il divenire temporale conformi alla normale percezione sensoriale: $\mathcal{V}$ è rappresentato come il particolare $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$ le cui $\underline{x}$ sono specificate dalle volumiche $\underline{x}$ di cui $\underline{x} \equiv (x_i;\ i=1,3)$ e $\underline{\mathfrak{R}}\langle x_i\rangle = \underline{\mathfrak{R}} \equiv (-\infty,\infty)$; il divenire temporale di un oggetto è rappresentato come una sua traslazione nella direzione di una retta dove è misurata un'ascissa temporale.

Rappresentando perciò $\mathcal{S}$ come una tale traslazione di $\mathcal{V}$, abbiamo $\mathcal{S} = \mathcal{V} \times \underline{\mathfrak{R}}\langle t\rangle$ con t la coordinata temporale di cui $\underline{\mathfrak{R}}\langle t\rangle = \underline{\mathfrak{R}}$, e $\mathcal{S}$ è il $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$ le cui $\underline{x}$ e $f(\underline{x})$ sono specificate da $\underline{ж}$ di cui $\underline{ж} \equiv (ж_i;\ i=1,4) \equiv (\underline{x},t)$ e da $f(\underline{ж})$ di cui $\underline{\mathfrak{I}}\langle f(\underline{ж})\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle\underline{ж}\rangle = \underline{\mathfrak{R}}^4$ dovuta a $\underline{\mathfrak{R}}\langle ж_i\rangle = \underline{\mathfrak{R}}$. I quattro valori di $\underline{ж}$ sono il *default* delle rispettive variabili.

Inoltre i tensori, introdotti in sezione 2.2 come inerenti il ɨ-dimensionale $\mathcal{E}_{\text{ɨ}}$, sono sottintesi inerenti il tridimensionale $\mathcal{V}$, così un tensore di ordine o e un vettore hanno rispettivamente 3^o e 3 componenti, e i $(\hat{\boldsymbol{e}}_i;\ i=1,3)$ di cui $\hat{\boldsymbol{e}}_i \equiv \delta_{ij}$ sono i versori coordinati del sistema di riferimento di $\mathcal{V}$.

Chiamiamo $\mathcal{V}_t$ il luogo di $\mathfrak{m}$ all'istante t i.e. il sottoinsieme di $\mathcal{S}$ individuato dall'istante t in quanto costituito dagli elementi che hanno lo stesso valore t della coordinata temporale.

La $\mathcal{S} = \mathcal{V} \times \underline{\mathfrak{R}}_t$ mostra $\mathcal{S}$ come l'insieme infinito di ogni $\mathcal{V}_t$ e $\mathcal{V}$ come il generico elemento di tale insieme. Quindi $\mathcal{V}$ è implicitamente $\mathcal{V}_t$ in coerenza con l'essere il valore di t quello di *default*.

Un volume è una parte di $\mathcal{V}$ che ha estensione e forma definiti dalla sua frontiera i.e. la sua superficie esterna, che, in quanto chiusa e senza bordo, lo delimita separandolo dal suo ambiente esterno. Il versore di una porzione piana di una frontiera è normale ad essa e convenzionalmente diretto verso l'esterno del volume. La misura di un volume V è $\int_{\mathsf{V}} d\mathsf{v}$. Un contatto tra due volumi avviene in una superficie di contatto intersezione dei due insiemi costituiti dalle rispettive frontiere.

La (24) è specificata da $\delta\mathrm{V} \equiv \Pi_{i=1,3}[x_i, x_i+dx_i]$ per cui $\delta\mathrm{V}$ è l'immobile cubo infinitesimo, individuato da $\underline{x}$ come quello dei suoi 8 vertici che ha minimo il valore di ogni coordinata, e la cui frontiera è l'unione $\underline{\delta\mathrm{A}}$ dei 6 quadrati $\{\delta\mathrm{A}_i, \delta\mathrm{A}_{+i};\ i=1,3\}$ con $\underline{x}$ vertice di $\delta\mathrm{A}_i$, $-\hat{\boldsymbol{e}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ i rispettivi versori dei $\delta\mathrm{A}_i$ e $\delta\mathrm{A}_{+i}$ distanti dx_i, e $\delta\mathrm{A}_{+i}$ che costituisce anche la frontiera del cubo infinitesimo $\delta\mathrm{V}_{+i}$ contiguo a $\delta\mathrm{V}$ nel verso di x_i crescente. Quindi $\mathcal{V}$ ha la discretizzazione costituita dalla sua equivalenza all'insieme infinito di cubi infinitesimi il cui generico elemento è $\delta\mathrm{V}$ i.e. dal considerarlo diviso in tali elementi.

In conformità al noto paradosso per cui un insieme è infinito (ed è anche detto "Dedekind-infinite set") se è in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio di conseguenza infinito anche esso, oltre a $\mathcal{V}$ è un insieme infinito anche un volume di estensione finita. Inoltre, in coerenza con ciò e $\underline{\mathrm{P}}_s \subset \underline{\mathrm{P}}_v$ con $\underline{\mathrm{P}}_v$ e $\underline{\mathrm{P}}_s$ gli insiemi di punti giacenti su un volume e la sua frontiera, anche $\underline{\mathrm{P}}_s$ è un insieme infinito come $\underline{\mathrm{P}}_v$, ma $\underline{\mathrm{P}}_s$ ha ordine minore di una unità rispetto quello di $\underline{\mathrm{P}}_v$ (essendo l'ordine di infinito di un insieme quello della sua numerosità i.e. del numero di elementi che lo costituiscono).

Un punto $\underline{x}$ è interno a un dominio (insieme chiuso) $\underline{\mathbb{I}}$ di cui $\underline{\mathbb{I}} \subset \mathcal{E}_{+}$ se $\exists \underline{\mathbb{D}_x} \subset \underline{\mathbb{I}}$ con $\underline{\mathbb{D}_x}$ un dominio circolare di centro $\underline{x}$. Un tale $\underline{\mathbb{I}}$ è internamente connesso se due suoi punti interni arbitrariamente scelti posso essere sempre congiunti da una spezzata i cui punti sono tutti interni a $\underline{\mathbb{I}}$.

Una PdM (i.e. una parte di $\mathcal{M}$) ha massa e volume nel senso che la prima è la sua quantità e il secondo il luogo di $\mathcal{V}$ dove solo essa è collocata. È sottintesa l'equivalenza tra i nomi di una PdM, della sua massa e del suo volume.

3.1 La continuità nella meccanica del continuo

Anche $\mathcal{M}$ è considerata un *continuum* come $\mathcal{S}$ (ciò dà il nome alla meccanica del continuo). Quindi, inerentemente una PdM di massa M e volume V internamente connesso e privo di buchi, senza divenire temporale i.e. in t stabiliamo

$$\lim_{\mathrm{V}\to 0}(\mathrm{M}/\mathrm{V}) = \delta\mathrm{M}/\delta\mathrm{V} \equiv \rho(\underline{ж}) \neq \{0 \veebar \infty\} \tag{30}$$

con ρ la densità di materia, C la PdM che ha $\delta\mathrm{M}$ e $\delta\mathrm{V}$, e di cui $\lim_{\mathrm{V}\to 0}\mathrm{V} \equiv \delta\mathrm{V}$, $\lim_{\mathrm{V}\to 0}\mathrm{M} \equiv \delta\mathrm{M}$.

Nel caso che $f(\underline{ж})$ esprime una proprietà di $\mathcal{M}$, è essenzialmente (30) che consente l'implicita $\{f(\underline{ж}) \in \mathrm{C}^0(\underline{ж}_0);\ \forall(f(\underline{ж}), \underline{ж}_0 \in \mathcal{S})\}$.

La relazione tra $f(\underline{x})$ e $\delta\mathrm{V}$ in sezione 2.3.2 è specificata da quella tra $f(\underline{ж})$ e $\delta\mathrm{V}$, essendo quindi f generalmente una grandezza fisica che descrive C ed è una sua proprietà.

Nelle applicazioni che rappresentano casi di PdM, il limite della (30) è sostituito da un V sufficientemente piccolo da non poter distinguere sue parti con diversi valori di ρ.

Un corpo è la PdM contenuta in un volume la cui frontiera non è attraversabile da materia. Infatti un corpo nel corso del tempo ha volume variabile ma massa costante coerentemente con la fondamentale legge di conservazione della massa (e.g. [24]).

3.2 La discretizzazione della materia

Un corpuscolo infinitesimo è un corpo che ha massa e volume entrambi infinitesimi. La conoscenza di entità infinitesime e infinite è limitata dalla loro inesistenza nel mondo materiale. Però, dovendo ridurre al minimo l'imposizione di condizioni, anche in osservanza dell'economia di pensiero prescritta dalla fondamentale regola scientifica nota come "Novacula Occami", ammettiamo che un corpuscolo infinitesimo apparirebbe a un immaginario osservatore infinitesimo (i.e. che occupi un volume infinitesimo) in modo del tutto equivalente a come un corpo finito appare a un normale osservatore finito.

In coerenza con ciò attribuiamo a $\mathfrak{m}$ la discretizzazione consistente nel considerarla divisa in (i.e. equivalente a) un insieme infinito di corpuscoli infinitesimi, contigui in quanto ogni parte della frontiera di uno è sempre in contatto con una o più frontiere di altri, generalmente differenti per massa e volume, e ognuno mobile lungo una rispettiva traiettoria poiché, per l'infinitesimale piccolezza del suo volume, è indivisibile e non può scindersi in parti mobili lungo rispettive traiettorie distinguibili come diverse in quanto a reciproche distanze finite. Perciò, analogamente a un volume di estensione finita, anche la PdM contenuta in esso è un insieme infinito di elementi infinitesimi.

Il generico elemento di tale insieme è il corpuscolo $\mathfrak{c}$, mobile lungo la propria traiettoria $\mathcal{T}$, di massa costante $\delta\mathfrak{M}$ e volume variabile $\delta\mathfrak{v}$.

Tra gli insiemi di ogni $\delta\mathtt{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$ poniamo in $\mathtt{t}$ una corrispondenza biunivoca tale che ogni coppia ha distanza minore tra i rispettivi centroidi.

Intendendo che è $(\delta\mathtt{v},\delta\mathfrak{v})$ la generica coppia di tale corrispondenza biunivoca, $\delta\mathtt{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$ sono generalmente diversi per quanto riguarda posizione, estensione e forma che potrebbero essere visti da un immaginario osservatore infinitesimo. Tuttavia tali differenze sono inconoscibili per la mente umana e di conseguenza le possiamo stabilire discrezionalmente purché compatibili e concordi con le date condizioni contestuali nelle quali $\delta\mathtt{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$ sono infinitesimi. Sottintendiamo e chiamiamo $\mathcal{D}$ questa subordinata discrezionalità nello stabilire posizione, estensione e forma di $\delta\mathfrak{v}$ come pure di ogni altra parte infinitesima di uno spazio.

Quindi sottintendiamo: $\delta\mathtt{v} \equiv \delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{M} \equiv \delta\mathfrak{M}$, in $\mathtt{t}$ coerentemente con l'essere $\delta\mathtt{v}$ immobile e $\delta\mathfrak{v}$ mobile; $\delta\mathfrak{v} \equiv \Pi_{i=1,3}[\mathfrak{x}_i,\mathfrak{x}_i+d\mathfrak{x}_i]$ e $\underline{\mathfrak{x}} = \underline{\mathtt{x}}$ con $\underline{\mathfrak{x}}$ (di cui $\underline{\mathfrak{x}} \equiv (\mathfrak{x}_i;\ i=1,3)$) il vertice di $\delta\mathfrak{v}$ che ha minimo il valore di ogni coordinata; $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ la frontiera di $\delta\mathfrak{v}$ costituita dall'unione dei 6 quadrati infinitesimi $\{\delta\mathfrak{A}_i,\delta\mathfrak{A}_{+i};\ i=1,3\}$, essendo $\underline{\mathfrak{x}}$ vertice di $\delta\mathfrak{A}_i$ e con $-\hat{\boldsymbol{e}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ (di cui $\hat{\boldsymbol{e}}_i \equiv \delta_{ij}$) i rispettivi versori dei $\delta\mathfrak{A}_i$ e $\delta\mathfrak{A}_{+i}$ distanti $d\mathfrak{x}_i$.

In base a ciò ogni immobile cubo infinitesimo che specifica $\delta\mathtt{v}$ è in $\mathtt{t}$ (che equivale a $[\mathtt{t},\mathtt{t}+d\mathtt{t}]$ in analogia a quanto detto in sezione 2.3.2 riguardo la relazione tra $f(\underline{\mathtt{x}})$ e $\delta\mathtt{v}$) il volume di un rispettivo corpuscolo mobile che specifica $\mathfrak{c}$.

La traiettoria $\mathcal{T}$ di $\mathfrak{c}$ è la curva individuata in uno spazio euclideo tridimensionale dalle equazioni parametriche $\underline{\mathfrak{x}} = \underline{\mathfrak{x}}(\mathtt{t})$ e alla quale corrisponde la curva di $\mathfrak{s}$ individuata dalle equazioni parametriche $\{\underline{\mathfrak{x}} = \underline{\mathfrak{x}}(\mathtt{t}),\mathfrak{t} = \mathfrak{x}_t(\mathtt{t}) \equiv \mathtt{t}\}$. Perciò la posizione di $\mathfrak{c}$ in $\mathtt{t}$ può essere chiamata $\underline{\mathfrak{x}}$ o $\boldsymbol{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{c}}$ di cui $\boldsymbol{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{c}} \equiv \mathfrak{x}_i$ con tale vettore $\boldsymbol{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{c}}$ applicato nell'origine del sistema di riferimento tridimensionale di $\boldsymbol{\mathfrak{v}}$ e che ha $\underline{\mathfrak{x}}$ come destinazione.

Un tensore $\mathbf{A}$ in una $h(\mathbf{A},\underline{e})$ equivale (in conformità a (1)) alla sequenza delle sue componenti, perciò $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}}) \equiv f_{\mathfrak{c}}(\boldsymbol{\mathfrak{x}}_{\mathfrak{c}})$.

Si pongono $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})$, $\mathfrak{I}\langle f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})\rangle = \mathcal{T}$, $\underline{\mathfrak{x}}$ e $\delta\mathfrak{v}$ come specificazioni dei $f(\underline{x})$, $\mathfrak{I}\langle f(\underline{x})\rangle = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathfrak{t}}$, $\underline{x}$ e $\delta\mathrm{v}$ di sezione 2.3.2. In base a ciò la relazione tra $f(\underline{x})$ e $\delta\mathrm{v}$ in tale sezione è specificata da quella tra $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})$ e $\delta\mathfrak{v}$, quindi stabiliamo $f_{\mathfrak{c}}$ come grandezza fisica che descrive $\mathfrak{c}$ ed è una sua proprietà. Una $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})$ può avere solo valori univocamente corrispondenti alle posizioni che $\delta\mathfrak{v}$ occupa su $\mathcal{T}$ al variare di t. Perciò tali valori sono quelli che $\delta\mathfrak{v}$ trasporta con se durante il suo moto e si intende ciò quando si dice che una grandezza $f_{\mathfrak{c}}$ è trasportata da $\mathfrak{c}$: un immaginario osservatore infinitesimo, costantemente posizionato in $\mathfrak{c}$, all'istante t misurerebbe $f_{\mathfrak{c}}$ come valore (medio di infinitesimi di secondo ordine) della grandezza f in tale corpuscolo. È implicito che $f_{\mathfrak{c}}$ implica $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})$.

Ciò, $\underline{\mathfrak{x}}=\underline{x}$ in t e l'essere $\underline{x}$ le coordinate di $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{t}}$ consentono di porre

$$\{f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}}) = f(\underline{\text{ж}});\ \forall f_{\mathfrak{c}}\} \tag{31}$$

la cui equazione implica $f_{\mathfrak{c}} = f$, e di cui $Æ\langle f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}}), f(\underline{\text{ж}}) \,/\, f_{\mathrm{A}}(\underline{a}), f_{\mathrm{B}}(\underline{b}) \,/\, (18)\rangle$.

Riguardo (31) è sottinteso che $f_{\mathfrak{c}}$ e f di $f(\underline{\text{ж}})$ possono avere pedici arbitrari a meno della condizione che il primo nome differisca dal secondo solo per la presenza di $\mathfrak{c}$.

Un volume è un sistema termodinamico se è in uno stato di equilibrio termodinamico i.e. se ogni grandezza termodinamica (e.g. la temperatura) vi è omogeneamente distribuita i.e. ha uno stesso valore in ogni suo punto. Un sistema termodinamico è aperto o chiuso o isolato se può scambiare con il suo ambiente esterno energia e materia o solo energia o né energia né materia.

Una equazione di stato lega grandezze termodinamiche, è specificamente propria di una certa sostanza, è determinata per mezzo di esperimenti e/o modelli sub-macroscopici i.e. a scala atomico-molecolare. Due più note equazioni di stato ([43]) sono quella termica (che lega densità, temperatura e pressione termodinamica e di cui è spesso, come nel seguito, omesso tale nome) e quella calorica (che lega l'energia interna a due delle anzidette).

Coerentemente con la relazione tra $f(\underline{\text{ж}})$ e $\delta\mathrm{v}$, i $\delta\mathrm{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$ sono sistemi termodinamici, aperto $\delta\mathrm{v}$ e chiuso $\delta\mathfrak{v}$, poiché le grandezze fisiche che li descrivono vi hanno (a meno di infinitesimi di ordine superiore) uno stesso valore costante nell'intera loro infinitesima estensione. Ciò, che è riferito come equilibrio termodinamico locale, implica che tali grandezze possono comparire nelle relazioni proprie della termodinamica e.g. un'equazione di stato.

Tali $\delta\mathrm{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$, come pure $f(\underline{\text{ж}})$ e $f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})$ di (31), corrispondono alle rispettive descrizioni euleriana (o spaziale o locale) e lagrangiana (o sostanziale o materiale) di un moto: nella prima sono considerate specificazioni di $\delta\mathrm{v}$ e le grandezze sono funzioni delle $\underline{\text{ж}}$; nella seconda sono considerate specificazioni di $\delta\mathfrak{v}$ e le grandezze sono funzioni di t i.e. delle funzioni parametriche (con t variabile indipendente) delle traiettorie di tali specificazioni.

3.3 Le derivate totale, locale (euleriana) e materiale (lagrangiana).

Da: (20); (31), assenza del vincolo che specifica (21), (18); segue

$$\partial f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}})/\partial \mathfrak{x}_{\mathrm{i}} \equiv \lim_{\Delta\mathfrak{x}\to 0}(f_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{x}_{\mathrm{j}}+\delta_{\mathrm{ij}}\Delta\mathfrak{x};\ \mathrm{j}=1,3)-f_{\mathfrak{c}}(\underline{\mathfrak{x}}))/\Delta\mathfrak{x} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}(f((\mathrm{x}_{\mathrm{j}}+\delta_{\mathrm{ij}}\Delta\mathrm{x};\ \mathrm{j}=1,3),\mathrm{t})-f(\underline{\text{ж}}))/\Delta\mathrm{x} = \partial f(\underline{\text{ж}})/\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}} \tag{32}$$

Da: $\Delta\boldsymbol{x}_c \equiv \boldsymbol{x}_c(t+\Delta t)-\boldsymbol{x}_c(t)$; (22); þ; Æ⟨**w** / f / (31)⟩; segue

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{x}_c/\Delta t \equiv \lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{x}_c(t+\Delta t)-\boldsymbol{x}_c(t))/\Delta t = d\boldsymbol{x}_c/dt \equiv \mathbf{w}_c(\underline{x}) = \mathbf{w}(\underline{ж}) \tag{33}$$

con $\Delta\boldsymbol{x}_c$ lo spostamento di c tra gli istanti t e $t+\Delta t$, $d\boldsymbol{x}_c$ e $\mathbf{w}_c$ spostamento infinitesimo e velocità di c, essendo questi tre vettori applicati nella destinazione di $\boldsymbol{x}_c$. In relazione al vettore **w** poniamo $\mathbf{w}\equiv w_i$.

Da: (23); $x_i'(t) = w_i(\underline{ж})$ (dovuta a $d\boldsymbol{x}_c/dt = \mathbf{w}(\underline{ж})$ in (33)), (32); (14); segue

$$df_c(\underline{x})/dt = \Sigma_{i=1,3}x_i'(t)\partial f_c(\underline{x})/\partial x_i = \Sigma_{i=1,3}w_i(\underline{ж})\partial f(\underline{ж})/\partial x_i = \nabla f(\underline{ж})\bullet\mathbf{w}(\underline{ж}) \tag{34}$$

Da: (23), $x_i'(t) = w_i(\underline{ж})$; (14); (34); segue

$$df(\underline{x},t)/dt = \partial f(\underline{ж})/\partial t+\Sigma_{i=1,3}w_i(\underline{ж})\partial f(\underline{ж})/\partial x_i = \partial f(\underline{ж})/\partial t+\nabla f(\underline{ж})\bullet\mathbf{w}(\underline{ж}) = \partial f(\underline{ж})/\partial t+df_c(\underline{x})/dt \tag{35}$$

la cui $f'(\underline{x}(t),t)$ è detta totale poiché somma delle altre due derivate, $\partial f(\underline{ж})/\partial t$ e $f_c'(\underline{x}(t))$, che hanno rilievo per il punto $\underline{ж}$ di ى e che sono rispettivamente locale (o euleriana) e materiale (o lagrangiana) come le rispettive funzioni derivande.

Una derivata è chiamata anche variazione intendendo variazione unitaria i.e. per unità di variabile di derivazione. Le $\partial f(\underline{ж})/\partial t$ e $f_c'(\underline{x}(t))$ sono variazioni che avvengono nei rispettivi δv e δ𝔳 (questa differenza tra le due variazioni sarebbe vista dal suddetto osservatore infinitesimo). La somma di variazioni, che avvengono in rispettivi volumi, avviene necessariamente nell'unione di tali volumi, e perciò (35) mostra che $f'(\underline{x}(t),t)$ è una variazione che avviene in δv ∪ δ𝔳. Inoltre $f'(\underline{x}(t),t)$ è l'intera variazione di f in δv ∪ δ𝔳 poiché in nessuna parte di questo avvengono altre variazioni oltre alle dette due. Tali avvenire in δv ∪ δ𝔳 e interezza implicano che $f(\underline{x},t)$ esprime la f in δv ∪ δ𝔳.

Queste distinzioni, come pure quella tra δ𝔳 e δv (di cui δv ≡ δ𝔳 in t), sarebbero impossibili se riguardassero il solo istante t, ma la loro fondatezza è invece evidenziata dal dover considerare, imposto da (17) e implicita continuità di ogni funzione, non il punto t ma limiti tendenti ad esso.

4 Il teorema del trasporto e l'equazione di bilancio

La generica porzione infinitesima δs della frontiera s del volume V ha il versore $\hat{\mathbf{e}}_s$ di cui $\hat{\mathbf{e}}_s \equiv \hat{e}_{si}$, che è normale a δs e che, come per la frontiera di ogni volume, è esterno i.e. orientato verso l'esterno di V.

In coerenza con (26) e $\underline{P}_s \subset \underline{P}_V$ di sezione 3, è sottinteso che la funzione integranda di un integrale esteso a un volume o superficie ha le $\underline{ж}$ come variabili indipendenti.

Il teorema della divergenza (o di Gauss o di Ostrogradsky) è espresso da

$$\int_V\nabla\bullet\mathbf{A}dV = \int_s\hat{\mathbf{e}}_s\bullet\mathbf{A}ds \tag{36}$$

i.e.

$$\int_V\Sigma_{i=1,3}\partial A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle o\rangle}/\partial x_i dV = \int_s\Sigma_{i=1,3}\hat{e}_{si}A_{ii\langle 2\rangle\ldots i\langle o\rangle}ds \qquad \text{i.e.} \qquad \int_V\partial F/\partial x_i dV = \int_s\hat{e}_{si}F ds$$

4.1 Il teorema del trasporto di Reynolds

Da (20) e il fatto che l'integrale di un limite è uguale al limite dell'integrale se tale limite influenza solo la funzione integranda, segue

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_V f(\underline{ж})/\Delta t\, dV = \lim_{\Delta t\to 0}\int_V f(\underline{x},t+\Delta t)/\Delta t - \partial f(\underline{ж})/\partial t\, dV \qquad (37)$$

Chiamiamo $\mathfrak{C}$ un corpo di massa $\mathfrak{m}$ e volume $\mathfrak{v}$ privo di buchi, internamente connesso e che ha frontiera $\mathfrak{s}$. Tali $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{s}$ all'istante t sono indicati $\mathfrak{v}_t$ e $\mathfrak{s}_t$ di cui $\mathfrak{v}_t \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}_t$. Ciò e l'essere implicito il valore di t rendono implicite anche le $\mathfrak{v} \equiv \mathfrak{v}_t$ e $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{s}_t$.

Da: (22), sostituzione di $\mathfrak{v}_{t+\Delta t}$ con il volume $\mathcal{v}_{t+\Delta t}$ che differisce da $\mathfrak{v}_{t+\Delta t}$ solo in conseguenza di $\mathcal{v}_{t+\Delta t} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}_t$ e $\mathfrak{v}_{t+\Delta t} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}_{t+\Delta t}$; (37); segue

$$d\int_{\mathfrak{v}} f(\underline{ж})d\mathfrak{v}/dt = \lim_{\Delta t\to 0}((\int_{\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle} f(\underline{x},t+\Delta t)d\mathfrak{v} - \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle} f(\underline{ж})d\mathfrak{v})/\Delta t) =$$
$$\int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle}\partial f(\underline{ж})/\partial t\, d\mathfrak{v} + \lim_{\Delta t\to 0}((\int_{\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle} f(\underline{x},t+\Delta t)d\mathfrak{v} - \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle} f(\underline{x},t+\Delta t)d\mathfrak{v})/\Delta t) \qquad (38)$$

La generica porzione infinitesima di $\mathfrak{s}$ è l'areola $\delta\mathfrak{s}$ di versore $\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}$, vettore posizione $\boldsymbol{x}_{\mathfrak{s}}$ applicato nell'origine del sistema di riferimento di $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, e vettore spostamento $\Delta\boldsymbol{x}_{\mathfrak{s}}$ applicato nella destinazione di $\boldsymbol{x}_{\mathfrak{s}}$ e compiuto tra gli istanti t e $t+\Delta t$.

Chiamando $\mathbf{h}\delta\mathfrak{s}$ e $\mathbf{k}\delta\mathfrak{s}$ i generici elementi di decomposizioni di $\mathcal{v}_{t+\Delta t}-\mathfrak{v}_t$ e $\mathfrak{v}_t-\mathcal{v}_{t+\Delta t}$ nel senso di

$$Æ\langle(\mathbf{h}\delta\mathfrak{s},\mathcal{v}_{t+\Delta t}-\mathfrak{v}_t),(\mathbf{k}\delta\mathfrak{s},\mathfrak{v}_t-\mathcal{v}_{t+\Delta t}) \,/\, \delta v, v \,/\, (27)\rangle$$

abbiamo

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{h} = \lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{k} = \lim_{\Delta t\to 0}\varpi_{\mathbf{g}}\mathbf{g} \qquad (39)$$

di cui $Æ\langle\mathbf{g} \,/\, ş \,/\, (8)\rangle$ e $\mathbf{g} \equiv \Delta\boldsymbol{x}_{\mathfrak{s}}\bullet\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}$, come pure

$$\int_{\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle-\mathfrak{v}\langle t\rangle} y\, d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{s}^+} y\mathbf{h}\, d\mathfrak{s} \qquad \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle-\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle} y\, d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{s}^-} y\mathbf{k}\, d\mathfrak{s} \qquad (40)$$

di cui $y(\underline{x},\underline{e})$, e le cui $\mathfrak{s}^+$ e $\mathfrak{s}^-$ sono le rispettive parti di $\mathfrak{s}$ dove $\varpi_{\mathbf{g}} = 1$ e $\varpi_{\mathbf{g}} = -1$.

Da: (29); (40); segue

$$\int_{\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle} y\, d\mathfrak{v} - \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle} y\, d\mathfrak{v} = \int_{\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle-\mathfrak{v}\langle t\rangle} y\, d\mathfrak{v} - \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle-\mathcal{v}\langle t+\Delta t\rangle} y\, d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{s}^+} y\mathbf{h}\, d\mathfrak{s} - \int_{\mathfrak{s}^-} y\mathbf{k}\, d\mathfrak{s} \qquad (41)$$

Da: (39); l'essere $\mathfrak{s}^+ \cup \mathfrak{s}^-$ la parte di $\mathfrak{s}$ dove $\mathbf{g} \neq 0$, $\mathfrak{s}^+ \cap \mathfrak{s}^- = \emptyset$, proprietà additiva dell'integrale; segue

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathfrak{s}^+} y\mathbf{h}\, d\mathfrak{s} - \int_{\mathfrak{s}^-} y\mathbf{k}\, d\mathfrak{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathfrak{s}^+} y\mathbf{g}\, d\mathfrak{s} + \int_{\mathfrak{s}^-} y\mathbf{g}\, d\mathfrak{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathfrak{s}} y\mathbf{g}\, d\mathfrak{s} \qquad (42)$$

Da: (41), (42), $g \equiv \Delta\boldsymbol{x}_{\mathbb{s}}\bullet\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}$; $\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{x}_{\mathbb{s}}/\Delta t = \mathbf{w}(\underline{ж})$; commutatività del prodotto scalare dei vettori $f\mathbf{w}$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}$; Æ⟨$\mathfrak{v}$,$\mathbb{s}$,$f\mathbf{w}$ / V,S,**A** / (36)⟩; segue

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\int_{\mathfrak{v}\langle t+\Delta t\rangle}f(\underline{x},t+\Delta t)d\mathfrak{v}-\int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle}f(\underline{x},t+\Delta t)d\mathfrak{v})/\Delta t = \lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathbb{s}}f(\underline{x},t+\Delta t)(\Delta\boldsymbol{x}_{\mathbb{s}}/\Delta t)\bullet\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}d\mathbb{s} =$$
$$\int_{\mathbb{s}}f\mathbf{w}\bullet\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}d\mathbb{s} = \int_{\mathbb{s}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}\bullet f\mathbf{w}d\mathbb{s} = \int_{\mathfrak{v}}\nabla\bullet f\mathbf{w}d\mathfrak{v}$$

Questa e (38) danno luogo a

$$d\int_{\mathfrak{v}}fd\mathfrak{v}/dt = \int_{\mathfrak{v}}\partial f/\partial t d\mathfrak{v}+\int_{\mathbb{s}}f\mathbf{w}\bullet\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{s}}d\mathbb{s} = \int_{\mathfrak{v}}\partial f/\partial t+\nabla\bullet f\mathbf{w}d\mathfrak{v} \tag{43}$$

che esprime il teorema del trasporto di Reynolds.

4.2 Le equazioni di bilancio e conservazione

L'ovvio principio di bilancio (attribuito in [3] allo stesso Osborne Reynolds del precedente teorema) afferma che la variazione di una quantità F contenuta nel volume di controllo V è uguale alla somma della F generata (creata, prodotta) in V più la F che entra in V attraverso la sua frontiera S.

Applicando tale principio alla F che ha la densità per unità di volume f otteniamo la generica equazione di bilancio

$$d\int_V f dV/dt = \int_V G_F dV-\int_S f\,\boldsymbol{w}_S\bullet\hat{\mathbf{e}}_S dS-\int_S\phi_F\bullet\hat{\mathbf{e}}_S dS$$

dove G_F è la F generata per unità di volume, $\boldsymbol{w}_S = \mathbf{w}-\mathbf{w}_S$, $\mathbf{w}_S$ è la velocità di δS, $f\,\boldsymbol{w}_S$ è il flusso (quantità per unità di tempo e superficie) di F convettivo (causato dal moto di materia i.e. dalla F trasportata dalla materia che attraversa δS) nella direzione orientata della velocità relativa $\boldsymbol{w}_S$, ϕ_F è il flusso di F diffusivo (indipendente dal moto di materia e.g. calore), il segno − che precede i flussi è dovuto alle convenzioni di $\hat{\mathbf{e}}_S$ diretto verso l'esterno di V e di considerare positiva una quantità acquisita da un volume. Una tale equazione è una legge di conservazione se $d\int_V f dV/dt = 0$.

5 Il principio di conservazione della massa

La discretizzazione di $\mathfrak{m}$ (detta in sezione 3.2) implica, per una qualsiasi PdM C che ha massa M e volume V, la $C \equiv \{c_c;\ c=1,\infty\}$ di cui Æ⟨c_c / c⟩ con c il corpuscolo infinitesimo che ha massa δM e volume δV. Perciò le proprietà di c_c sono riferite aggiungendo il pedice c al nome di quelle di c e sono specificazioni di queste, e.g. δM_c e δV_c sono massa e volume di c_c di cui Æ⟨δM_c,δV_c / δM,δV⟩. In base a ciò abbiamo

$$V \equiv \{\delta V_c;\ c=1,\infty\} \qquad V = \cup_{c=1,\infty}\delta V_c \qquad M = \Sigma_{c=1,\infty}\delta M_c \tag{44}$$

Da: ciò; $\delta M = \rho\delta V$ (da (30)); Æ⟨ρ,$\underline{x}$,t,δV,V / g,$\underline{x}$,$\underline{e}$,δV,V / (27)⟩; segue

$$M = \Sigma_{c=1,\infty}\delta M_c = \Sigma_{c=1,\infty}\rho(\underline{x}_c,t)\delta V_c = \int_V\rho dV \tag{45}$$

Da: Æ⟨$\mathfrak{M},\mathfrak{v},\mathfrak{C}$ / M,V,C / (45)⟩; Æ⟨ρ / f / (43)⟩; Æ⟨ρ,**w** / A,**B** / (16)⟩, commutatività del prodotto scalare; segue

$$d\mathfrak{M}/dt = d\int_{\mathfrak{v}}\rho d\mathfrak{v}/dt = \int_{\mathfrak{v}}\partial\rho/\partial t+\nabla\bullet\rho\mathbf{w}d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}}\partial\rho/\partial t+\rho\nabla\bullet\mathbf{w}+\nabla\rho\bullet\mathbf{w}d\mathfrak{v}$$

Questa, $d\mathfrak{M}/dt = 0$ (poiché $\mathfrak{M}$ è la massa di un corpo), la genericità di $\mathfrak{v}$ (che consente di dedurre l'uguaglianza delle funzioni integrande dall'uguaglianza degli integrali) e Æ⟨ρ / f /(35)⟩ danno luogo a

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\bullet\rho\mathbf{w} = 0 \qquad d\rho/dt+\rho\nabla\bullet\mathbf{w} = 0 \tag{46}$$

che sono due forme dell'equazione di continuità per la massa ossia del principio di conservazione della massa.

6 La deformazione

Chiamando deformazione di un volume i moti relativi tra suoi punti, il suo risultato sono le differenze di estensione e forma che ha causato di tale volume, la sua velocità è la rapidità con cui si svolge nel tempo.

Consideriamo la deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ tra $t-\Delta t$ e t per descriverla, in base a Æ⟨$f_{\mathfrak{c}}(\underline{x})$,$\delta\mathfrak{v}$ / $f(\underline{x})$,δV / sezione 2.3.2⟩ e (31), con funzioni di tipo $f(\underline{ж})$.

In coerenza con Æ⟨$\mathfrak{x}$ / f / (31)⟩, $\mathfrak{x}_{\mathfrak{c}} \equiv \mathfrak{x}_i$ e (in t) $\mathfrak{x}_i = x_i$, poniamo $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}+\mathfrak{s}$ di cui $\mathfrak{x} \equiv x_i$, $\mathfrak{a} \equiv a_i$, $\mathfrak{s} \equiv s_i$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{a})$ ∨ $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ con $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{x}$ le posizioni di $\delta\mathfrak{v}$ in $t-\Delta t$ e t, essendo perciò $\mathfrak{s}$ lo spostamento di $\delta\mathfrak{v}$ nell'intervallo $[t-\Delta t,t]$. Tali vettori possono essere riferiti a uno spazio tridimensionale, dove $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{x}$ sono applicati nell'origine del sistema di riferimento, $\mathfrak{s}$ è applicato nella destinazione di $\mathfrak{a}$ e ha la stessa destinazione di $\mathfrak{x}$.

Da $\mathfrak{a}(\mathfrak{x})$ e $\mathfrak{a} \equiv a_i$ deduciamo, in base a (19), $da_i = \partial a_i/\partial\mathfrak{x}\bullet d\mathfrak{x}$ i.e. $d\mathfrak{a} = \partial\mathfrak{a}/\partial\mathfrak{x}\bullet d\mathfrak{x}$ di cui $\partial\mathfrak{a}/\partial\mathfrak{x} \equiv \partial a_i/\partial x_j$ i.e. $da_i = \Sigma_{j=1,3}\partial a_i/\partial x_j dx_j$, e analogamente $d\mathfrak{x} = \partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a}\bullet d\mathfrak{a}$ di cui $\partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a} \equiv \partial x_i/\partial a_j$.

Una deformazione è omogenea se è costante il gradiente di deformazione $\partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a}$. Specificando un noto teorema di analisi matematica (e.g. (2.4.6.2) di [22]) abbiamo

$$\int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle}f(\mathfrak{x})d\mathfrak{v}_t = \int_{\mathfrak{v}\langle t-\Delta t\rangle}f(\mathfrak{x}(\mathfrak{a}))\left|\det([\partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a}])\right|d\mathfrak{v}_{t-\Delta t}$$

di cui $d\mathfrak{v}_t \equiv \delta\mathfrak{v} \equiv \Pi_{i=1,3}d\mathfrak{x}_i$, $d\mathfrak{v}_{t-\Delta t} \equiv \delta\mathfrak{v}_{t-\Delta t} \equiv \Pi_{i=1,3}da_i$, dove $[\partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a}]$ è la matrice jacobiana di $\mathfrak{x}(\mathfrak{a})$, e da cui segue

$$\delta\mathfrak{v}_t/\delta\mathfrak{v}_{t-\Delta t} = \left|\det([\partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{a}])\right|$$

Da: $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}+\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\mathfrak{a})$; (6), 𝕀⟨$a_i$; i=1,3⟩; segue

$$\partial x_i/\partial a_j = \partial a_i/\partial a_j+\partial s_i/\partial a_j = \partial s_i/\partial a_j+\delta_{ij} \tag{47}$$

Da: Æ$\langle d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{\alpha}$ / $d\mathbf{x}$ / (25)$\rangle$; (6); (19); þ; (47); segue

$$|d\boldsymbol{x}|^2-|d\boldsymbol{\alpha}|^2 = \Sigma_{h=1,3}dx_h dx_h-\Sigma_{i=1,3}da_i da_i = \Sigma_{k=1,3}\Sigma_{h=1,3}\delta_{hk}dx_h dx_k-\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}\delta_{ij}da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\Sigma_{h=1,3}\Sigma_{k=1,3}\delta_{hk}(\partial x_h/\partial a_i)(\partial x_k/\partial a_j)-\delta_{ij})da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\Sigma_{h=1,3}(\partial x_h/\partial a_i)(\partial x_h/\partial a_j)-\delta_{ij})da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial a_i+\delta_{hi})(\partial s_h/\partial a_j+\delta_{hj})-\delta_{ij})da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial a_i)(\partial s_h/\partial a_j)+\delta_{hi}\partial s_h/\partial a_j+\delta_{hj}\partial s_h/\partial a_i+\delta_{hi}\delta_{hj}-\delta_{ij})da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial a_i)(\partial s_h/\partial a_j)+\Sigma_{h=1,3}(\delta_{hi}\partial s_h/\partial a_j)+\Sigma_{h=1,3}(\delta_{hj}\partial s_h/\partial a_i) +\Sigma_{h=1,3}(\delta_{hi}\delta_{hj})-\delta_{ij})da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}(\partial s_i/\partial a_j+\partial s_j/\partial a_i+\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial a_i)(\partial s_h/\partial a_j))da_i da_j =$$

$$\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{i=1,3}2E_{ij}da_i da_j = d\boldsymbol{\alpha}\bullet 2\mathbf{E}\bullet d\boldsymbol{\alpha} \tag{48}$$

dove $\mathbf{E}$ è il tensore deformazione di Green e St. Venant espresso da

$$\mathbf{E} \equiv E_{ij} = (\partial s_i/\partial a_j+\partial s_j/\partial a_i+\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial a_i)(\partial s_h/\partial a_j))/2$$

Analogamente a (48) ma con $\mathbf{s}(\boldsymbol{x})$ invece di $\mathbf{s}(\boldsymbol{\alpha})$, si deduce

$$|d\boldsymbol{x}|^2-|d\boldsymbol{\alpha}|^2 = d\boldsymbol{x}\bullet 2\mathbf{e}\bullet d\boldsymbol{x} \tag{49}$$

dove $\mathbf{e}$ è il tensore deformazione di Cauchy e Almansi espresso da

$$\mathbf{e} \equiv e_{ij} = (\partial s_i/\partial x_j+\partial s_j/\partial x_i-\Sigma_{h=1,3}(\partial s_h/\partial x_i)(\partial s_h/\partial x_j))/2$$

e approssimato dal tensore deformazione infinitesimo di Cauchy ε di cui

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{ij} = (\partial s_i/\partial x_j+\partial s_j/\partial x_i)/2 \equiv ((\nabla\mathbf{s})^T+\nabla\mathbf{s})/2 \tag{50}$$

intendendo che $(\nabla\mathbf{s})^T$ si ottiene scambiando la posizione degli indici in $\partial s_i/\partial x_j$ (e allo stesso modo per il gradiente di un qualsiasi vettore).

I $\mathbf{E}$ e $\mathbf{e}$ sono detti lagrangiano ed euleriano in quanto inerenti i luoghi $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{t-\Delta t}$ e $\boldsymbol{\mathcal{V}}_t$ della materia che consideriamo rispettivamente indeformata e deformata.

In coerenza con la discrezionalità $\mathcal{D}$ (in sezione 3.2), in $t-\Delta t$ possiamo porre immediatamente la conveniente $\delta v \equiv \delta\mathfrak{v}$, ma il risultato della deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ tra $t-\Delta t$ e t rimane generalmente inconoscibile, poiché in t la sua frontiera è sconosciuta e in questo contesto non ci possiamo avvalere di $\mathcal{D}$ per caratterizzarla sufficientemente senza inficiare proprio la cercata conoscenza. Questa esclusione di $\mathcal{D}$ è dovuta al non essere $\delta\mathfrak{v}_t$ infinitesimo rispetto al $\delta\mathfrak{v}_{t-\Delta t}$ con cui deve essere confrontato. Infatti, in assenza di ulteriori condizioni, le informazioni di forma deducibili da $\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{\alpha}$, come pure da $|d\boldsymbol{x}|^2-|d\boldsymbol{\alpha}|^2$, possono riguardare solo segmenti rettilinei, quando però in assenza di $\mathcal{D}$ la frontiera di $\delta\mathfrak{v}$ non è necessariamente costituita da facce piane delimitate da tale tipo di segmenti.

Tuttavia, se tale deformazione è infinitesima i.e. trascurabile come costituita da infinitesimi di ordine superiore, possiamo stabilire che $\delta\mathfrak{v}$ è un cubo anche in t, $|d\boldsymbol{\alpha}|$ e $|d\boldsymbol{x}|$ sono (in base a Æ⟨d$\boldsymbol{\alpha}$,d$\boldsymbol{x}$ / dx / (25)⟩) le lunghezze della diagonale di $\delta\mathfrak{v}$ nei due istanti, e $|d\boldsymbol{x}|^2-|d\boldsymbol{\alpha}|^2$ descrive il risultato della deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ tanto esaustivamente bene da poterla considerare come una sua misura (notiamo che $d\boldsymbol{\alpha}$ può anche essere considerato come un generico vettore infinitesimo, conseguendo che esso e $d\boldsymbol{x}$ non sono necessariamente dette diagonali).

Tale idoneità di $|d\boldsymbol{x}|^2-|d\boldsymbol{\alpha}|^2$ se possiamo ammettere che $\delta\mathfrak{v}$ è un cubo in entrambi gli istanti $t-\Delta t$ e t, può essere confermata da un esperimento mentale approssimabile con una simulazione al computer in cui infinitesimi e infiniti sono sostituiti da quantità sufficientemente piccole e grandi, e consistente, intendendo Æ⟨ş$_c$ /ş⟩ e $ş_t$ come ş all'istante t, nel porre $\mathfrak{v}_{t-\Delta t} \equiv \{\delta\mathfrak{v}_{t-\Delta t,c};\ c=1,\infty\}$ e nel dedurre poi $\mathfrak{v}_t$ sostituendo ogni $\delta\mathfrak{v}_{t-\Delta t,c}$ di diagonale $d\boldsymbol{\alpha}_c$ con il corrispondente $\delta\mathfrak{v}_{tc}$ di diagonale $d\boldsymbol{x}_c$.

Ciò, (48) e (49) implicano che l'infinitesimalità della deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ consente di descrivere il suo risultato per mezzo di $\mathbf{E}$ o $\mathbf{e}$ (non di rado alcuni autori deducono questi due tensori idonei a descrivere il risultato di deformazioni finite e quindi senza necessità della detta infinitesimalità). Nel seguito consideriamo solo $\mathbf{e}$ poiché siamo interessati a funzioni di tipo $f(\underline{ж})$, essendo però analoga la trattazione di $\mathbf{E}$ per funzioni di tipo $f(\underline{x},t-\Delta t)$.

Infatti, sussistendo tale infinitesimalità (e quindi trascurabilità), la descrizione con $\mathbf{e}$ è confermata dai seguenti significati fisici: $\partial s_i/\partial x_i dx_i$ è una traslazione di $\delta\mathfrak{A}_{+i}$ rispetto $\delta\mathfrak{A}_i$ nella i-esima direzione, la distanza tra $\delta\mathfrak{A}_i$ e $\delta\mathfrak{A}_{+i}$ in $t-\Delta t$ e t è $dx_i-\partial s_i/\partial x_i dx_i$ e dx_i e perciò $\partial s_i/\partial x_i$ è un allungamento relativo per unità di lunghezza; inoltre $\partial s_i/\partial x_j dx_j$ è una traslazione di $\delta\mathfrak{A}_{+j}$ rispetto $\delta\mathfrak{A}_j$ nella i-esima direzione, e quindi implica il cambiamento di forma indicato da $\partial s_i/\partial x_j$ come approssimazione dell'angolo $\mathrm{arctg}(\partial s_i/\partial x_j)$ (tanto migliore quanto più è piccolo tale angolo) tra i piani di $\delta\mathfrak{A}_i$ prima e dopo la deformazione.

Una deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ infinitesima equivale all'infinitesimalità di $\nabla\mathbf{s}$ i.e. $\partial s_i/\partial x_j$, e questa condizione sussiste se è infinitesimo $\mathbf{s}$ i.e. s_i.

Quindi l'infinitesimalità della deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ è garantita da un $\mathbf{s}$ infinitesimo, quando però nel mondo materiale ogni spostamento è finito come ogni altra grandezza fisica.

Ciò comporta che $\mathbf{e}$ non può descrivere esattamente il risultato della deformazione in un punto $\underline{ж}$. Tuttavia un $\mathbf{s}$ infinitesimo, che equivale a un $d\boldsymbol{x}_c$, implica il venire meno la distinzione tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ come pure che le derivate presenti nelle espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{e}$ sono anche esse infinitesime per cui i loro prodotti sono trascurabili come infinitesimi di ordine superiore, e quindi dà luogo a $\mathbf{E} = \mathbf{e} = \varepsilon$. Pertanto ε può descrivere adeguatamente una deformazione purché corrispondente a un $|\mathbf{s}|$ abbastanza piccolo (per questi motivi ε è detto infinitesimo).

Da: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}+\mathbf{s}$; $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_c$ dovuta a Æ⟨$\boldsymbol{x}$ / f / (31)⟩, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}_c(t-\Delta t)$; (33), uguaglianza delle derivate a destra e sinistra dovuta a Æ⟨$\boldsymbol{x}_c'(t)\in C^0(t)$ / $f(\underline{x})\in C^0(\underline{x}_0)$ / sezione 2.3.1⟩; segue

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{s}/\Delta t = \lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})/\Delta t = \lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{x}_c(t)-\boldsymbol{x}_c(t-\Delta t))/\Delta t = d\boldsymbol{x}_c/dt = \mathbf{w}(\underline{ж}) \tag{51}$$

La sostituzione di $\mathbf{s}$ con lo spostamento nell'unità di tempo $d\boldsymbol{x}_c/dt$ e (51) comportano che i tensori deformazione $\mathbf{e}$ e ε (più pertinenti la meccanica dei solidi) divengono i tensori velocità di deformazione $\dot{\mathbf{e}}$ e $\dot{\varepsilon}$ (più pertinenti la meccanica dei fluidi) di cui

$\dot{\mathbf{e}} \equiv \dot{\mathbf{e}}_{ij} = (\partial w_i/\partial x_j+\partial w_j/\partial x_i-\Sigma_{h=1,3}(\partial w_h/\partial x_i)(\partial w_h/\partial x_j))/2$

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \dot{\varepsilon}_{ij} = (\partial w_i/\partial x_j+\partial w_j/\partial x_i)/2 \equiv ((\nabla \mathbf{w})^T+\nabla \mathbf{w})/2$ (52)

L'essere $\dot{\mathbf{e}}$ inerente l'infinitesimo spostamento $d\boldsymbol{x}_c$ implica infinitesima la deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ e quindi (a differenza di $\mathbf{e}$ inerente il finito $\mathbf{s}$) il suo essere una descrizione esatta della velocità di deformazione nel punto $\underline{ж}$. Invece ciò non è per $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ che approssima $\dot{\mathbf{e}}$ meglio al diminuire di $|\mathbf{w}|$ ma completamente (i.e. verificando $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{e}}$) solo per valori di questo infinitesimi e quindi inesistenti nel mondo materiale.

7 Forze e sforzi

Riguardo quanto segue è opportuno ricordare l'equivalenza per cui un volume è sostituibile dalla PdM in esso contenuta.

Una forza è imposta da un volume a un altro che la subisce ed è rappresentata come un vettore applicato in un punto del secondo. È implicito che le forze esistono nello stesso istante, sono di uno stesso tipo e sono subite da un certo volume.

Una forza è mobile o immobile come il punto nel quale è applicata. Perciò le forze subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ sono rispettivamente mobili e immobili, coerentemente con (17) e continuità di ogni funzione per cui non consideriamo t quando $\delta\mathrm{v} \equiv \delta\mathfrak{v}$ ma suoi intorni quando generalmente $\delta\mathrm{v} \not\equiv \delta\mathfrak{v}$. Una tale distinzione non è consueta giacché nella letteratura tecnica di solito è implicito che le forze sono mobili e come tali subite da ogni PdM.

Una forza è interna o esterna rispettivamente se è imposta da una parte o dall'ambiente esterno del volume che la subisce. Un volume infinitesimo subisce solo forze esterne, poiché non sono considerate sue divisioni in più volumi.

Con riferimento alla distinzione tra forze reali e inerziali (le inerziali sono dette anche apparenti o fittizie, e in base al principio di D'Alembert le possiamo trattare come forze esterne), nel seguito sono considerate sole forze reali (i.e. non inerziali).

In questo contesto di meccanica del continuo una forza è di superficie (i.e. di contatto) o di volume (i.e. di massa). Una forza di contatto è applicata nella frontiera di un volume ed è correlata a pressione termodinamica o deformazione di tale volume. Sono forze di contatto del secondo tipo quelle di attrito, che sono dette viscose se riguardano fluidi. Sono forze di massa quelle di campo gravitazionali, elettriche e magnetiche (come pure quelle inerziali).

Il punto di applicazione di una forza è considerato come un elemento di una superficie o di un volume nei rispettivi casi degli omonimi tipi. Una forza di contatto esterna è applicata in un punto della superficie esterna del volume che la subisce.

Una somma vettoriale di forze è detta risultante e il suo punto di applicazione, pure dovendo essere tra quelli del volume che subisce le forze, è indeterminato in quanto diversi quelli di tali forze. Intendiamo ciò nel dire che un volume subisce una risultante.

La terza legge di Newton, o terzo principio della dinamica o principio di azione e reazione, afferma che per ogni forza imposta da una PdM a un'altra, la seconda impone alla prima una forza di eguali direzione e magnitudine, e di opposto verso. Quindi le forze esistono a coppie i cui elementi sono vettori uguali ed opposti.

L'essere ogni forza interna o esterna implica che una risultante è uguale alla somma di due rispettive risultanti di forze esterne e interne. Tuttavia la seconda è deducibile nulla dalla terza legge di Newton. Perciò una risultante è uguale alla risultante di sole forze esterne.

Intendiamo $\delta\mathsf{v} \equiv \{\delta\mathfrak{v} \vee \delta\mathrm{v}\}$ per cui $\delta\mathsf{v}$ è il cubo infinitesimo individuato da $\underline{\mathsf{x}}$, di cui $\underline{\mathsf{x}} \equiv \{\underline{\mathfrak{x}} \vee \underline{x}\}$, come quello dei suoi 8 vertici che ha minimo il valore di ogni coordinata, la cui superficie esterna $\underline{\delta\mathsf{A}}$ è costituità dall'unione dei $\{\delta\mathsf{A}_i,\delta\mathsf{A}_{+i};\ i=1,3\}$ di cui $\delta\mathsf{A} \equiv \{\delta\mathfrak{A} \vee \delta\mathrm{A}\}$ e il cui $\delta\mathsf{A}_{+i}$ costituisce anche la frontiera ed è parte del cubo infinitesimo $\delta\mathsf{v}_{+i}$ adiacente a $\delta\mathsf{v}$ nel verso di x_i crescente. Tali $\{\delta\mathsf{A}_i,\delta\mathsf{A}_{+i}\}$ sono distanti $d\mathsf{x}_i$ e hanno i rispettivi versori $\{-\hat{\mathbf{e}}_i,\hat{\mathbf{e}}_i\}$ di cui $\hat{\mathbf{e}} \equiv \{\hat{\boldsymbol{e}} \vee \hat{\boldsymbol{e}}\}$.

Chiamiamo $\mathbf{F}$ e $\delta\mathbf{F}$, di cui $\delta\mathbf{F} = \mathbf{f}\delta\mathsf{v}$, due risultanti subite dai rispettivi $\mathfrak{v}$ e $\delta\mathsf{v}$. In coerenza con l'essere espresse da funzioni di $\underline{\text{ж}}$ e $\underline{\mathfrak{x}}$ grandezze fisiche che descrivono i rispettivi c e $\mathfrak{c}$, $\mathbf{f}$ è funzione di $\underline{\text{ж}}$ (e non di $\underline{\mathfrak{x}}$) se $\delta\mathsf{v} \equiv \delta\mathrm{v}$ o di $\underline{\mathfrak{x}}$ (e quindi, per (31), anche di $\underline{\text{ж}}$) se $\delta\mathsf{v} \equiv \delta\mathfrak{v}$, conseguendo che $\mathbf{f}$ può essere in ogni caso espressa da una funzione di $\underline{\text{ж}}$.

Da: discretizzazione di $\mathfrak{v}$ analoga a quella di (44); $Æ\langle \mathbf{f},\underline{x},t,\delta\mathsf{v},\mathfrak{v} \,/\, g,\underline{x},\underline{e},\delta\mathrm{v},\mathrm{V} \,/\, (27)\rangle$; segue

$$\mathbf{F} = \Sigma_{c=1,\infty}\mathbf{f}(\underline{x}_c,t)\delta\mathrm{v}_c \equiv \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}d\mathfrak{v} \equiv \int_{\mathfrak{v}\langle t\rangle}\mathbf{f}(\underline{x},t)d\mathfrak{v} \tag{53}$$

il cui ultimo membro ha lo scopo di evidenziare $\mathbf{F}(t)$.

7.1 Il vettore sforzo o tensione o stress

Chiamiamo $\Delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}$ la risultante di forze esterne di contatto subite da $\mathfrak{v}$ su una porzione $\Delta\mathbb{S}$ della sua superficie esterna $\mathbb{S}$. Nel limite per $\Delta\mathbb{S} \to 0$ tutti gli effetti, che avrebbe la sola $\Delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}$ applicata nel centroide di $\Delta\mathbb{S}$, sono gli stessi dell'inerente insieme di forze in quanto il momento di ogni coppia di tali forze diviene trascurabile come infinitesimo di ordine superiore. Perciò, intendendo

$$\delta\mathbb{S} \equiv \lim_{\Delta\mathbb{S}\to 0}\Delta\mathbb{S} \qquad \delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}} \equiv \lim_{\Delta\mathbb{S}\to 0}\Delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}} \qquad \mathbf{S}_{\mathbb{S}} \equiv \lim_{\Delta\mathbb{S}\to 0}\Delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}/\Delta\mathbb{S} = \delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}/\delta\mathbb{S} \tag{54}$$

le forze esterne di contatto, subite da $\mathfrak{v}$ sull'areola infinitesima $\delta\mathbb{S}$ di versore $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{S}}$, equivalgono e sono implicitamente sostituite dalla loro risultante $\delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}$ intesa come forza di contatto applicata nel centroide di $\delta\mathbb{S}$, e $\mathbf{S}_{\mathbb{S}}$ è l'inerente vettore chiamato sforzo o tensione o stress o *traction* che ha la magnitudine di una forza per unità di superficie.

Ciò e la terza legge di Newton comportano, oltre a $\delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}$ e $\mathbf{S}_{\mathbb{S}}$ subite da $\mathfrak{v}$ e imposte su $\delta\mathbb{S}$ dall'ambiente esterno, anche $-\delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}}$ e $-\mathbf{S}_{\mathbb{S}}$ imposte da $\mathfrak{v}$ e subite su $\delta\mathbb{S}$ dall'ambiente esterno.

Uno sforzo è detto normale o tangenziale se è tale rispetto l'inerente superficie. Uno sforzo tangenziale è detto anche sforzo di taglio.

Quanto testé di $\mathfrak{v}$ e $\mathbb{S}$ può essere riferito anche a $\delta\mathsf{v}$ e $\underline{\delta\mathsf{A}}$. Ponendo quindi $\mathbf{S}_i = \delta\mathbf{F}_i/\delta\mathsf{A}_i$ di cui $Æ\langle\delta\mathsf{A}_i, \delta\mathbf{F}_i,\mathbf{S}_i \,/\, \delta\mathbb{S},\delta\mathbf{F}_{\mathbb{S}},\mathbf{S}_{\mathbb{S}}\rangle$ con la risultante $\delta\mathbf{F}_i$ e lo sforzo $\mathbf{S}_i$ subiti da $\delta\mathsf{v}$ su $\delta\mathsf{A}_i$ e imposti dal cubo infinitesimo $\delta\mathsf{v}_{-i}$ con cui $\delta\mathsf{v}$ è a contatto nel verso di x_i decrescente, abbiamo (come pure per $\mathbf{f}$) $\mathbf{S}_i(\underline{\text{ж}})$ e

$\mathbf{s}_{+i} = \mathbf{s}_i((x_i+\delta_{ii}dx_i;\ i=1,3),t) \equiv \mathbf{s}_i(\underline{ж})+\partial\mathbf{s}_i(\underline{ж})/\partial x_i dx_i$ (55)

con $\mathbf{s}_{+i}$ lo sforzo imposto da δV e subito da δV_{+i} su δA_{+i}, e la $\mathbf{s}^+_i = -\mathbf{s}_{+i}$ dovuta alla terza legge di Newton con $\mathbf{s}^+_i$ imposto da δV_{+i} e subito da δV su δA_{+i}.

La $\mathbf{s}^+_i = -\mathbf{s}_{+i}$, i cui $\mathbf{s}^+_i$ e $\mathbf{s}_{+i}$ sono entrambi applicati su δA_{+i}, implica che è nulla la risultante di forze di contatto applicate su ogni quadrato di contatto tra due dei $\{\delta V_c;\ c=1,\infty\}$ che costituiscono $\mathfrak{v}$ e quindi conferma la nullità della risultante di forze di contatto interne a $\mathfrak{v}$.

7.2 Il tensore degli sforzi

Ponendo $\mathbf{s}_i \equiv \tau_{ij}$ come specificazione di (1) (e analogamente $\mathbf{s}_{+i} \equiv \tau_{+ij}$, $\mathbf{s}^+_i \equiv \tau^+_{ij}$), abbiamo il tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\tau}$ definito da $\boldsymbol{\tau} \equiv \tau_{ij}$ e subito da δV sui $\{\delta A_i;\ i=1,3\}$ essendo $\tau_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j$ lo sforzo su δA_i e nella j-esima direzione.

Una componente τ_{ij} è detta normale se $i = j$ o tangenziale se $i \neq j$, poiché è tale rispetto δA_i il vettore $\tau_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j$ (e analogamente le τ_{+ij} e τ^+_{ij}).

7.2.1 Lo stato tensionale di *default*

Uno sforzo è trazionale o compressivo se è diretto verso l'esterno o l'interno del volume che lo subisce.

Per definire, e rappresentare graficamente come è particolarmente utile quando trattiamo vettori, gli sforzi di *default* subiti dai volumi, è necessario sceglierli convenzionalmente trazionali o compressivi. Questi due casi definiscono i due stati tensionali di *default* rispettivamente chiamati trazione positiva (o compressione negativa) e compressione positiva (o trazione negativa).

La compressione negativa o positiva (la seconda può essere preferibile in caso di fluidi poiché questi non possono subire sforzi trazionali) danno rispettivamente luogo a $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{S}}\bullet\mathbf{s}_{\mathbb{S}} > 0$ o $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{S}}\bullet\mathbf{s}_{\mathbb{S}} < 0$ in quanto $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{S}}$ è esterno.

Da: (4), $\hat{\mathbf{e}}_i \equiv \delta_{ij}$, $\mathbf{s}_i \equiv \tau_{ij}$; (6); compressione positiva, $Æ\langle\delta A_i,-\hat{\mathbf{e}}_i,\mathbf{s}_i \big/ \delta\mathbb{S},\hat{\mathbf{e}}_{\mathbb{S}},\mathbf{s}_{\mathbb{S}}\rangle$; segue

$$-\hat{\mathbf{e}}_i\bullet\mathbf{s}_i = -\Sigma_{k=1,3}\delta_{ik}\tau_{kj} = -\tau_{ij} < 0$$

da cui $\tau_{ij} > 0$, e analogamente deduciamo $\tau_{ij} < 0$ nel caso di compressione negativa.

Pertanto in questo contesto scegliamo la compressione positiva e $\tau_{ij} > 0$, poiché viceversa la compressione negativa e $\tau_{ij} < 0$ imporrebbero la necessità di fare eccezione alla positività del valore di *default* di ogni grandezza.

Come tale $\tau_{ij} > 0$ abbiamo anche $\tau_{+ij} > 0$ che per $\mathbf{s}^+_i = -\mathbf{s}_{+i}$ implica $\tau^+_{ij} < 0$.

7.2.2 La simmetria del tensore degli sforzi

Escludendo rotazioni e deformazioni di δV per mezzo della $\mathcal{D}$ di sezione 3.2, dall'assenza di rotazione intorno all'asse perpendicolare a δA_k e passante per il centro di forma di δV, e intendendo $k \neq i \neq j$, segue, in base alla seconda legge di Newton per la rotazione ([90]) i.e. la seconda legge di Eulero per i corpi rigidi ([5]), nulla la somma dei momenti rispetto tale asse delle forze $\tau_{ij}\delta A_i\hat{\mathbf{e}}_j$, $\tau_{ji}\delta A_j\hat{\mathbf{e}}_i$, $\tau^+_{ij}\delta A_{+i}\hat{\mathbf{e}}_j$, $\tau^+_{ji}\delta A_{+j}\hat{\mathbf{e}}_i$.

Tale nullità, $\delta A_i = \delta A_{+i}$, $\tau_{ij} > 0$ e $\tau^+_{ij} < 0$ implicano $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ e $\tau^+_{ij} = \tau^+_{ji}$. Questa simmetria di $\boldsymbol{\tau}$ è usualmente dedotta dalla fondamentale legge della meccanica del continuo costituita dal bilancio del momento angolare della quantità di moto rispetto un punto fisso e sostanzialmente equivalente a quella citata.

7.2.3 Il teorema degli sforzi di Cauchy

Chiamiamo $\delta\mathbf{F}_C$ la risultante di forze di contatto subite da δv. Da: ciò; $\mathbf{S}^+_i = -\mathbf{S}_{+i}$, (55); $\delta A_i = \delta A_{+i}$, $\delta A_i dx_i = \delta v$; $\mathbf{S}_i \equiv \tau_{ij}$; $\boldsymbol{\tau} \equiv \tau_{ij}$ segue

$$\delta\mathbf{F}_C = \Sigma_{i=1,3}\mathbf{S}_i\delta A_i+\mathbf{S}^+_i\delta A_{+i} = \Sigma_{i=1,3}\mathbf{S}_i\delta A_i-(\mathbf{S}_i+\partial\mathbf{S}_i/\partial x_i dx_i)\delta A_{+i}) = -\delta v\Sigma_{i=1,3}\partial\mathbf{S}_i/\partial x_i \equiv -\delta v\Sigma_{i=1,3}\partial\tau_{ij}/\partial x_i \equiv -\delta v\nabla\bullet\boldsymbol{\tau} \quad (56)$$

il cui segno – si elimina dagli ultimi due membri adottando come stato tensionale di *default* la trazione positiva e considerando il valore di *default* di τ_{ij} positivo come per ogni grandezza.

Inoltre chiamiamo $\mathbf{F}_C$ la risultante di forze di contatto subite da $\mathfrak{v}$. Da: $\delta\mathbf{F}_C = -\delta v\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}$ in (56),

$$Æ\langle \mathbf{F}_C,\delta\mathbf{F}_C = -\delta v\nabla\bullet\boldsymbol{\tau} \,/\, \mathbf{F},\delta\mathbf{F} = \mathbf{f}\delta v \,/\, (53)\rangle;\ Æ\langle \boldsymbol{\tau},\mathfrak{v},\mathfrak{s} \,/\, \mathbf{A},v,s \,/\, (36)\rangle;$$

segue

$$\mathbf{F}_C = -\int_{\mathfrak{v}}\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}d\mathfrak{v} = -\int_{\mathfrak{s}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}\bullet\boldsymbol{\tau}d\mathfrak{s} \quad (57)$$

Chiamiamo $\mathbf{F}_{CE}$ la risultante di forze di contatto esterne subite da $\mathfrak{v}$. Da: discretizzazione di $\mathfrak{s}$ analoga a quella di (44), $\delta\mathbf{F}_{\mathfrak{s}} = \mathbf{S}_{\mathfrak{s}}\delta\mathfrak{s}$ in (54); $Æ\langle \mathbf{S}_{\mathfrak{s}},\underline{x},t,\delta\mathfrak{s},\mathfrak{s} \,/\, g,\underline{x},\underline{e},\delta v,v \,/\, (27)\rangle$; segue

$$\mathbf{F}_{CE} = \Sigma_{c=1,\infty}\mathbf{S}_{\mathfrak{s}}(\underline{x}_c,t)\delta\mathfrak{s}_c = \int_{\mathfrak{s}}\mathbf{S}_{\mathfrak{s}}d\mathfrak{s} \quad (58)$$

Da $\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{CE}$ (dovuta alla nullità della risultante di forze interne), (57), (58) e genericità di $\mathfrak{s}$ segue il teorema degli sforzi di Cauchy

$$\mathbf{S}_{\mathfrak{s}} = -\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}\bullet\boldsymbol{\tau} \quad (59)$$

che è conseguibile anche per mezzo dell'omonimo tetraedro.

7.3 Le forze subite da un corpo

Una forza, riassumendo i principali tipi, può essere subita o imposta, di contatto o massa, esterna o interna, immobile o mobile. Inoltre una forza di contatto è di pressione termodinamica o deformazione.

Chiamiamo $\mathbf{F}_ş$ la risultante di tutte le forze subite da $\mathfrak{v}$ e di un certo tipo indicato da ş come una combinazione dei {T,E,C,B,M,I,P,D} che specificano rispettivamente ogni tipo, esterna, di contatto, di volume, mobile, immobile, di pressione termodinamica, di deformazione. Chiamiamo $\tau_ş$ un tensore che differisce da τ (il cui tipo non è stato specificato) solo per la specificazione indicata da ş. Ammettiamo che un τ immobile o mobile è rispettivamente subito da $\delta\mathrm{v}$ o $\delta\mathfrak{v}$.

Da: ciò; þ; þ; þ; $\mathbf{F}_{BM} = \mathbf{F}_{BME}$ e $\mathbf{F}_{BI} = \mathbf{F}_{BIE}$ (dovute a nullità della risultante di forze interne); Æ⟨$\mathbf{F}_ş$,$\mathbf{f}_ş$ / $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}$ / (53)⟩; Æ⟨$\mathbf{F}_{C...}$,$\mathbf{f}_{C...}$ / $\mathbf{F}_C$,$-\nabla\bullet\tau$ / (57)⟩; segue, per la risultante $\mathbf{F}_T$ di tutte le forze subite da $\mathfrak{v}$,

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_C+\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_M+\mathbf{F}_I = \mathbf{F}_{CM}+\mathbf{F}_{CI}+\mathbf{F}_{BM}+\mathbf{F}_{BI} = \mathbf{F}_{CPM}+\mathbf{F}_{CDM}+\mathbf{F}_{CPI}+\mathbf{F}_{CDI}+\mathbf{F}_{BM}+\mathbf{F}_{BI} =$$
$$\mathbf{F}_{CPM}+\mathbf{F}_{CDM}+\mathbf{F}_{CPI}+\mathbf{F}_{CDI}+\mathbf{F}_{BME}+\mathbf{F}_{BIE} = \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_{CPM}+\mathbf{f}_{CDM}+\mathbf{f}_{CPI}+\mathbf{f}_{CDI}+\mathbf{f}_{BME}+\mathbf{f}_{BIE}d\mathfrak{v} =$$
$$\int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_{BME}+\mathbf{f}_{BIE}-\nabla\bullet\tau_{PM}-\nabla\bullet\tau_{DM}-\nabla\bullet\tau_{PI}-\nabla\bullet\tau_{DI}d\mathfrak{v} \qquad (60)$$

Ponendo $\neg\mathcal{P}$ la proposizione vera o falsa rispettivamente se $\mathcal{P}$ è falsa o vera, $\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\neg\mathcal{P}_B \Rightarrow \neg\mathcal{P}_A\}$ (legge di contrapposizione, in (3) di [2]), $\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_A \Leftarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\}$ ((2) di [2]), $\{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\} \equiv \{\neg\mathcal{P}_A \equiv \neg\mathcal{P}_B\}$,

$$\mathcal{P}_P \equiv \text{“}\tau \equiv \tau_P\text{”} \equiv \neg\mathcal{P}_D \qquad \mathcal{P}_D \equiv \text{“}\tau \equiv \tau_D\text{”} \equiv \neg\mathcal{P}_P \qquad \mathcal{P}_I \equiv \text{“}\tau \equiv \tau_I\text{”} \equiv \neg\mathcal{P}_M \qquad \mathcal{P}_M \equiv \text{“}\tau \equiv \tau_M\text{”} \equiv \neg\mathcal{P}_I$$

e ammettendo evidente la $\mathcal{P}_D \Rightarrow \mathcal{P}_M$, deduciamo come segue le $\mathcal{P}_P \equiv \mathcal{P}_I$ e $\mathcal{P}_D \equiv \mathcal{P}_M$ che affermano l'inesistenza di ogni τ mobile di pressione termodinamica o immobile di deformazione, e quindi

$$\neg\exists\tau_{PM} \qquad \neg\exists\tau_{DI} \qquad (61)$$

che implicano rispettivamente $\neg\exists\mathbf{F}_{CPM}$ e $\neg\exists\mathbf{F}_{CDI}$.

Infatti $\mathcal{P}_P \Rightarrow \mathcal{P}_M$ i.e. $\neg\mathcal{P}_M \Rightarrow \neg\mathcal{P}_P$ e $\mathcal{P}_D \Rightarrow \mathcal{P}_M$ i.e. $\neg\mathcal{P}_M \Rightarrow \neg\mathcal{P}_D$ danno luogo a $\neg\mathcal{P}_M \Rightarrow \{\neg\mathcal{P}_P \wedge \neg\mathcal{P}_D\}$ che è falsa in quanto equivalente a $\mathcal{P}_I \Rightarrow \{\mathcal{P}_P \wedge \mathcal{P}_D\}$ il cui secondo membro è impossibile poiché una forza non può essere sia di pressione termodinamica che di deformazione. Quindi abbiamo una *demonstratio per absurdum* (e.g. sezione 2 di [2]) della $\neg\{\mathcal{P}_P \Rightarrow \mathcal{P}_M\}$ (equivalente a $\neg\{\mathcal{P}_I \Rightarrow \mathcal{P}_D\}$ che, peraltro, non è meno evidente di $\mathcal{P}_D \Rightarrow \mathcal{P}_M$). La $\neg\{\mathcal{P}_P \Rightarrow \mathcal{P}_M\}$ implica $\mathcal{P}_P \Rightarrow \neg\mathcal{P}_M$ i.e. $\mathcal{P}_M \Rightarrow \mathcal{P}_D$. Questa e $\mathcal{P}_D \Rightarrow \mathcal{P}_M$ danno luogo alla cercata $\mathcal{P}_D \equiv \mathcal{P}_M$. Da: þ; $\mathcal{P}_D \equiv \mathcal{P}_M$; segue $\mathcal{P}_P \equiv \neg\mathcal{P}_D \equiv \neg\mathcal{P}_M \equiv \mathcal{P}_I$ e quindi la cercata $\mathcal{P}_P \equiv \mathcal{P}_I$.

La $\neg\exists\tau_{DI}$ è confermata dal fatto che τ_{DI}, in quanto immobile, dovrebbe essere correlato alla deformazione di $\delta\mathrm{v}$, quando però questo, oltre che avere superficie esterna attraversabile da materia, è immobile, immutabile e indeformabile, potendo perciò scambiare materia con l'ambiente esterno senza poter avere alcuna deformazione.

Una pressione è la magnitudine con segno di uno sforzo normale; e.g. la pressione $p_{\mathfrak{s}}$, che l'ambiente esterno di $\mathfrak{v}$ esercita su $\delta\mathfrak{s}$, è (dati gli attuali versore esterno e compressione positiva) la magnitudine con segno dello sforzo $-p_{\mathfrak{s}}\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}$ i.e. $p_{\mathfrak{s}}$ è la componente di $\mathbf{s}_{\mathfrak{s}}$ secondo $-\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}$ in quanto Æ⟨$\mathbf{s}_{\mathfrak{s}}$,$-\hat{\mathbf{e}}_{\mathfrak{s}}$, $p_{\mathfrak{s}}$ / $\mathbf{a}$,$\hat{\mathbf{e}}_N$,$\hat{\mathbf{e}}_N\bullet\mathbf{a}$ / (12)⟩.

La $\neg\exists\tau_{PM}$ è confermata dal fatto che τ_{PM}, in quanto mobile, dovrebbe essere correlato alla pressione termodinamica di $\delta\mathfrak{v}$, quando però l'isotropia di questa grandezza, resa immediatamente evidente da quella di densità e temperatura cui è legata dall'equazione di stato, è incompatibile con le tre generalmente diverse pressioni $\{\tau_{DMii};\ i=1,3\}$ correlate alla deformazione di $\delta\mathfrak{v}$ essendo τ_{DMii} quella di $\tau_{DMii}\hat{\mathbf{e}}_i$. In altre parole $\neg\exists\tau_{PM}$ è coerente con l'inesistenza, di una sola pressione termodinamica nell'infinitesimo $\delta\mathfrak{v}$, causata dalla simultaneità delle tre generalmente diverse pressioni di deformazione $\{\tau_{DMii};\ i=1,3\}$ sulle rispettive $\{\delta\mathfrak{A}_i;\ i=1,3\}$.

La necessità di distinguere tra forze mobili e immobili, come pure tra $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ di cui $\delta\mathrm{v}\equiv\delta\mathfrak{v}$ in $\mathtt{t}$, è evidenziata dal dover considerare, imposto da (17) e implicita continuità di ogni funzione, non il punto $\mathtt{t}$ ma limiti tendenti ad esso.

Infatti nel limite per $t\rightarrow\mathtt{t}$ le superficie $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ e $\underline{\delta\mathrm{A}}$ si avvicinano sempre più tendendo a sovrapporsi ma permangono distinte, e ciò induce a distinguere le rispettive forze di contatto subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ come grandezze diverse i.e. come proprietà di diversi oggetti consistenti in distinte superfici.

Una analoga distinzione, basata sul fatto che nel detto limite anche $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ rimangono distinti analogamente a $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ e $\underline{\delta\mathrm{A}}$, potrebbe essere adottata anche tra le rispettive forze di volume subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$, ma è invece negata per le seguenti ragioni.

In base a (24) abbiamo

$$\delta\mathsf{v}/\delta\mathsf{A}_i=\delta\mathsf{x}_i\delta\mathsf{x}_j\delta\mathsf{x}_k/(\delta\mathsf{x}_j\delta\mathsf{x}_k)=\delta\mathsf{x}_i=\lim_{\Delta x\rightarrow0}\Delta x=0 \qquad (62)$$

La distinzione tra due insiemi $\underline{\mathrm{A}}$ e $\underline{\mathrm{B}}$ può essere misurata da $\check{\mathbf{D}}\langle\underline{\mathrm{A}},\underline{\mathrm{B}}\rangle$ di cui $\check{\mathbf{D}}\langle\underline{\mathrm{A}},\underline{\mathrm{B}}\rangle\equiv\{\underline{\mathrm{A}}-\underline{\mathrm{B}}\}+\{\underline{\mathrm{B}}-\underline{\mathrm{A}}\}$. L'essere $\delta\mathsf{v}$ un infinitesimo di ordine superiore rispetto $\underline{\delta\mathsf{A}}$ (come deduciamo da (62)) implica che anche $\check{\mathbf{D}}\langle\delta\mathfrak{v},\delta\mathrm{v}\rangle$ è tale rispetto a $\check{\mathbf{D}}\langle\underline{\delta\mathfrak{A}},\underline{\delta\mathrm{A}}\rangle$ e quindi l'irrilevanza della distinzione tra $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ quando si considera quella tra $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ e $\underline{\delta\mathrm{A}}$.

Inoltre, di fatto, la distinzione tra forze di contatto subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ equivale a quella tra le rispettive $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ e $\underline{\delta\mathrm{A}}$, come pure la distinzione tra forze di volume subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$ equivale a quella tra tali volumi.

Pertanto una distinzione tra forze di volume subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$, analoga a quella testé accettata per le forze di contatto, è impedita dalla detta irrilevanza della distinzione tra tali volumi rispetto quella tra le loro superfici.

Ciò è confermato dal considerare che tali due tipi di forze di volume non hanno, oltre a mobilità e immobilità (rispettivamente dovute all'essere subite da $\delta\mathfrak{v}$ e $\delta\mathrm{v}$), ulteriori caratteristiche distintive analoghe alle anzidette per le forze di contatto subite da $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ e $\underline{\delta\mathrm{A}}$.

Questa indistinzione tra forze di volume e l'ovvia consueta esistenza delle forze mobili di volume inducono ad ammettere

$$\neg\exists\mathbf{F}_{BI} \qquad\qquad \neg\exists\mathbf{f}_{BIE} \qquad (63)$$

Quanto testé per le forze vale in genere per ogni grandezza, nel senso della indistinzione, e quindi unicità, di due grandezze che differiscono per l'essere proprietà di $\delta\mathfrak{v}$ ma non di $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ o di $\delta\mathrm{v}$ ma non di $\underline{\delta\mathrm{A}}$, e della distinzione, e quindi duplicità, di due grandezze che differiscono per l'essere proprietà di $\underline{\delta\mathfrak{A}}$ o $\underline{\delta\mathrm{A}}$.

Notiamo inoltre che le (61) e (63) sono basate su schemi infinitesimali consentiti dalla sottintesa $\mathcal{D}$ di sezione 3.2.

Le $\mathsf{P}(\underline{ж})$, $\mathsf{T}(\underline{ж})$ e $\rho(\underline{ж})$ esprimono rispettivamente pressione termodinamica P, temperatura T e densità ρ della sostanza di cui è composta la PdM c che occupa $\delta\mathrm{v}$. Queste tre variabili sono quelle dell'equazione di stato di tale sostanza che con l'attuale compressione positiva esprime P rispettivamente positiva o negativa se è compressiva o trazionale, ed essendo inoltre P isotropa anche perché sono tali ρ e T.

In coerenza con ciò e l'essere una pressione la magnitudine con segno di uno sforzo normale, abbiamo Æ$\langle \mathsf{P}\hat{\boldsymbol{e}}_i,\delta\mathrm{A}_i,-\hat{\boldsymbol{e}}_i,\tau_{PI} / \mathbf{s}_{\$},\delta\$,\hat{\mathbf{e}}_{\$},\tau / (59)\rangle$ che dà luogo a $\mathsf{P}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i\bullet\boldsymbol{\tau}_{PI}$ di cui $\boldsymbol{\tau}_{PI} \equiv \tau_{PIij}$ con $\boldsymbol{\tau}_{PI}$ il tensore degli sforzi subito da $\delta\mathrm{v}$ sui $\{\delta\mathrm{A}_i;\ i=1,3\}$ e funzione di P.

Scrivendo tale $\mathsf{P}\hat{\boldsymbol{e}}_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i\bullet\boldsymbol{\tau}_{PI}$ in termini scalari per mezzo di (3) e (4), e intendendo (per (61)) $\boldsymbol{\tau}_{PI} \equiv \boldsymbol{\tau}_P \equiv \tau_{Pij}$, abbiamo

$$\mathsf{P}\delta_{ij} = \Sigma_{h=1,3}\delta_{ih}\tau_{Phj} = \tau_{Pij}$$

i.e. $\boldsymbol{\tau}_P = \mathsf{P}\boldsymbol{\delta}$ di cui $\boldsymbol{\delta} \equiv \delta_{ij}$.

Da: $\boldsymbol{\tau}_P = \mathsf{P}\boldsymbol{\delta}$; (16); $\nabla\bullet\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ di cui $\mathbf{0} \equiv 0$; (4); segue

$$\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_P = \nabla\bullet\mathsf{P}\boldsymbol{\delta} = \mathsf{P}\nabla\bullet\boldsymbol{\delta}+\nabla\mathsf{P}\bullet\boldsymbol{\delta} = \nabla\mathsf{P}\bullet\boldsymbol{\delta} = \nabla\mathsf{P} \tag{64}$$

Da: Æ$\langle \mathbf{F}_T,\mathbf{f}_T / \mathbf{F},\mathbf{f} / (53)\rangle$; (60), (61), (63), (15); $\boldsymbol{\tau}_{DM} \equiv \boldsymbol{\tau}_D$, $\boldsymbol{\tau}_{PI} \equiv \boldsymbol{\tau}_P$, $\mathbf{f}_{BME} \equiv \mathbf{f}_{BE}$ (giustificate da (61) e (63)); (64); segue

$$\mathbf{F}_T = \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_T d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_{BME}-\nabla\bullet(\boldsymbol{\tau}_{DM}+\boldsymbol{\tau}_{PI})d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_{BE}-\nabla\bullet(\boldsymbol{\tau}_D+\boldsymbol{\tau}_P)d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}}\mathbf{f}_{BE}-\nabla\mathsf{P}-\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_D d\mathfrak{v} \tag{65}$$

di cui Æ$\langle \mathbf{f}_{BE} / f / (31)\rangle$ e Æ$\langle \delta\mathbf{F}_{BE},\mathbf{f}_{BE},\delta\mathfrak{v} / \delta\mathbf{F},\mathbf{f},\delta\mathrm{v} / (53)\rangle$ con $\mathbf{f}_{BE}$ la risultante, per unità di volume, delle forze di massa subite da $\delta\mathfrak{v}$ e imposte dall'ambiente esterno di $\mathfrak{v}$, e dove $\boldsymbol{\tau}_D$ (di cui $\boldsymbol{\tau}_D \equiv \tau_{Dij}$) è il tensore degli sforzi subito da $\delta\mathfrak{v}$ sui $\{\delta\mathfrak{A}_i;\ i=1,3\}$ e connesso alla deformazione di $\delta\mathfrak{v}$.

La correttezza di (65) è confermata dall'avere ottenuto $\mathbf{F}_T$ considerando ogni distinguibile tipo di forze e senza ripetizioni di stessi addendi.

In coerenza con (65) e il poter essere solo di deformazione le componenti tangenziali di tensori di sforzi, poniamo

$$\boldsymbol{\tau}_T = \boldsymbol{\tau}_D+\boldsymbol{\tau}_P = \boldsymbol{\tau}_D+\mathsf{P}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_T+\overline{\mathsf{P}}\boldsymbol{\delta} \tag{66}$$

con $\boldsymbol{\mathcal{T}}_T$ il tensore deviatore di cui $\boldsymbol{\mathcal{T}}_T \equiv \mathcal{T}_{Tij}$ e che ha traccia nulla ($\Sigma_{i=1,3}\mathcal{T}_{Tii} = 0$) poiché $\overline{\mathsf{P}} = \Sigma_{i=1,3}\tau_{Tii}/3$. Tale $\overline{\mathsf{P}}$, quantunque abbia anche il nome di pressione meccanica, è però la mera media delle componenti normali di $\boldsymbol{\tau}_T$ ed è perciò una reale pressione del mondo materiale solo se $\tau_{Tii} = \tau_{Tjj}$.

Da: (65); $\nabla\mathsf{P} = \nabla\bullet\mathsf{P}\boldsymbol{\delta}$ in (64), (15); (66); $\mathbf{f}_{ћ} = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_D$; segue

$$\mathbf{f}_T = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\mathsf{P}-\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\bullet(\mathsf{P}\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\tau}_D) = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{f}_{ћ}-\nabla\mathsf{P} \tag{67}$$

dove, avendo $\delta\mathrm{v} \equiv \delta\mathfrak{v} \equiv \delta\mathrm{v} \cup \delta\mathfrak{v}$ nell'implicito $\mathtt{t}$, $-\nabla\mathsf{P}\delta\mathrm{v}$ e $\mathbf{f}_{ћ}\delta\mathfrak{v}$ sono le rispettive risultanti di tutte le forze subite da $\delta\mathrm{v}$ e $\delta\mathfrak{v}$, e invece $-\nabla\bullet\boldsymbol{\tau}_T\delta\mathrm{v}$ e $\mathbf{f}_T\delta\mathrm{v}$ sono entrambe risultanti di forze subite da $\delta\mathrm{v} \cup \delta\mathfrak{v}$ poiché la risultante di un insieme di forze è la somma degli elementi di tale insieme e quindi l'associatività di una tale somma evidenzia come la risultante delle forze applicate alla unione di volumi è uguale alla somma delle risultanti inerenti tali volumi.

7.4 Le equazioni costitutive per gli sforzi

Diciamo costitutiva una relazione (e.g. un'equazione di stato) peculiare di un certa sostanza in quanto la individua, caratterizza e descrive essendo determinata per mezzo di specifici esperimenti e/o modelli sub-macroscopici. Una legge e una relazione costitutiva descrivono entrambe il mondo materiale, ma una vale esattamente per ogni sostanza e invece l'altra è attinente una sola sostanza idealizzata e schematizzata in quanto da essa descritta come approssimazione della realtà materiale.

Il τ_D è, insieme ad altre variabili che descrivono la deformazione di $\delta\mathfrak{v}$, tra le variabili di una equazione costitutiva per gli sforzi della sostanza di cui è composto $\mathfrak{c}$.

Le più note equazioni costitutive per gli sforzi sono la legge di elasticità lineare di Hooke generalizzata per le sostanze isotrope i.e.

$$\tau_T = 2\mu\varepsilon+\lambda(\nabla\bullet\mathfrak{s})\boldsymbol{\delta} \qquad \text{i.e.} \qquad \varepsilon = E^{-1}((1+\nu)\tau_T-\nu\Sigma_{i=1,3}\tau_{Tii}\boldsymbol{\delta}) \tag{68}$$

dove τ_D è sostituita da τ_T in base a (66) e in quanto non si ha interesse a distinguere $\mathsf{P}\boldsymbol{\delta}$, il cui ε è definito da (50), con μ e λ le costanti di Lamé, E il modulo di elasticità normale di Young, ν il coefficiente di contrazione trasversale di Poisson; e l'equazione dei fluidi newtoniani isotropi (anche questa evidentemente lineare) che esprime gli sforzi viscosi i.e. la prima delle

$$\tau_D = 2\mathit{\mu}\dot{\varepsilon}+\mathit{\lambda}(\nabla\bullet\mathbf{w})\boldsymbol{\delta} \qquad \tau_D = 2\mathit{\mu}(\dot{\varepsilon}-(\nabla\bullet\mathbf{w})\boldsymbol{\delta}/3) \tag{69}$$

il cui $\dot{\varepsilon}$ è definito da (52), con $\mathit{\mu}$ e $\mathit{\lambda}$ i coefficienti di viscosità, la cui seconda segue dalla prima e dalla ipotesi di Stokes $\mathit{\lambda} = -2\mathit{\mu}/3$, essendo però generalmente $\mathit{\lambda}$ un'incognita in conseguenza dell'impossibilità di sue misure sperimentali e dell'indimostrabilità di detta ipotesi ([7], [9], [76]). Generalmente μ, λ, E, ν, $\mathit{\mu}$, $\mathit{\lambda}$ sono funzioni di altre variabili quali T e P.

Da: þ; (66); prima delle (69), (52); segue

$$\overline{\mathsf{P}} = \Sigma_{i=1,3}\tau_{Tii}/3 = \Sigma_{i=1,3}(\tau_{Dii}+\mathsf{P})/3 = \kappa\nabla\bullet\mathbf{w}+\mathsf{P} \tag{70}$$

di cui $\kappa = \mathit{\lambda}+2\mathit{\mu}/3$ con κ il coefficiente di viscosità di volume, e che mostra come $\kappa = 0$ (che segue dalla ipotesi di Stokes) e/o $\nabla\bullet\mathbf{w} = 0$ implicano $\overline{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$.

La seconda di (69) equivale a

$$\tau_{Dij} = 2\mathit{\mu}(\dot{\varepsilon}_{ij}-(\nabla\bullet\mathbf{w})\delta_{ij}/3)$$

che, sostituendo $\dot{\varepsilon}_{ij}$ con la sua espressione in (52) e $\nabla\bullet\mathbf{w}$ con l'espressione della divergenza di un vettore, diviene

$\tau_{Dij} = \mu(\partial w_i/\partial x_j + \partial w_j/\partial x_i - 3^{-1} 2 \Sigma_{k=1,3} \delta_{ij} \partial w_k/\partial x_k)$

quindi la

$$\tau_{Dij} = \mu \Sigma_{h=1,3} \Sigma_{k=1,3} \mathbf{\delta}_{ijkh} \partial w_k/\partial x_h \tag{71}$$

di cui $\mathbf{\delta}_{ijkh} \equiv \delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{jk}\delta_{ih} - (2/3)\delta_{hk}\delta_{ij}$ e che è un'altra scrittura della seconda di (69).

8 La deduzione della nuova legge

8.1 La seconda legge di Newton

Ogni volume ha un punto come suo centro di massa. La posizione $\boldsymbol{\chi}_V$, del centro di massa $\underline{\chi}_V$ di V, è il vettore applicato nell'origine del sistema di riferimento tridimensionale di $\boldsymbol{\gamma}$ e che ha come destinazione $\underline{\chi}_V$ di cui $\underline{\chi}_V \equiv (\chi_{Vi}; i=1,3)$. A questo riguardo abbiamo

$$\boldsymbol{\chi}_V = M^{-1}\int_V \rho \boldsymbol{\chi} dV \qquad\qquad \mathbf{w}_V = d\boldsymbol{\chi}_V/dt \tag{72}$$

di cui $\boldsymbol{\chi}_V \equiv \chi_{Vi}$, (45), $\boldsymbol{\chi} \equiv x_i$, e con $\mathbf{w}_V$ la velocità di $\underline{\chi}_V$.

Da: $Æ\langle \mathfrak{v},\mathfrak{m} \,/\, V,M \,/\, (72)\rangle$; costanza di $\mathfrak{m}$, $Æ\langle \rho x_i \,/\, f \,/\, (43)\rangle$, $\partial x_i/\partial t = 0$ dovuta a $\mathbb{T}\langle \underline{\text{ж}} \rangle$; $Æ\langle x_i, \rho\mathbf{w} \,/\, A,\mathbf{B} \,/\, (16)\rangle$; (46), (14); $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$ dovuta a $\mathbb{T}\langle \underline{\text{ж}} \rangle$; segue

$$\mathbf{w}_\mathfrak{v} \equiv d\mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} \rho x_i d\mathfrak{v}/dt = \mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} x_i \partial\rho/\partial t + \nabla\bullet\rho x_i \mathbf{w} d\mathfrak{v} = \mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} x_i(\partial\rho/\partial t + \nabla\bullet\rho\mathbf{w}) + \nabla x_i \bullet \rho\mathbf{w} d\mathfrak{v} =$$
$$\mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} \rho \Sigma_{j=1,3} w_j \partial x_i/\partial x_j d\mathfrak{v} = \mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} \rho w_i d\mathfrak{v} \equiv \mathfrak{m}^{-1}\int_\mathfrak{v} \rho\mathbf{w} d\mathfrak{v} \tag{73}$$

Da: questa; $Æ\langle \rho w_i \,/\, f \,/\, (43)\rangle$, $Æ\langle w_i, \rho\mathbf{w} \,/\, A,\mathbf{B} \,/\, (16)\rangle$; (46), $\nabla w_i \bullet \rho\mathbf{w} = \rho\nabla w_i \bullet \mathbf{w}$; segue

$$d\mathfrak{m}\mathbf{w}_\mathfrak{v}/dt \equiv d\int_\mathfrak{v} \rho w_i d\mathfrak{v}/dt = \int_\mathfrak{v} w_i(\partial\rho/\partial t + \nabla\bullet\rho\mathbf{w}) + \rho\partial w_i/\partial t + \nabla w_i \bullet \rho\mathbf{w} d\mathfrak{v} = \int_\mathfrak{v} \rho(\partial w_i/\partial t + \nabla w_i \bullet \mathbf{w}) d\mathfrak{v} \equiv$$
$$\int_\mathfrak{v} \rho(\partial\mathbf{w}/\partial t + \nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}) d\mathfrak{v} \tag{74}$$

Analogamente a questa e considerando (35), deduciamo anche $d\int_\mathfrak{v} \rho f d\mathfrak{v}/dt = \int_\mathfrak{v} \rho\, df(\underline{\chi},t)/dt\, d\mathfrak{v}$.

La seconda legge di Newton (o secondo principio della dinamica), a prescindere dal dibattito sulle incertezze dell'originaria esposizione in [92] ([5], [18], [20], [36], [88]), di solito è riferita in relazione a speciali punti di $\boldsymbol{\gamma}$ che sono detti materiali, in quanto dotati di rispettive masse finite. Tale legge, per un punto materiale $\mathcal{P}$ nel quale è applicata la sola forza $\mathcal{F}$, che è dotato di massa $\mathcal{M}$ e si muove con velocità $\mathcal{W}$, ha la più generale formulazione

$$d\mathcal{M}\mathcal{W}/dt = \mathcal{M}d\mathcal{W}/dt + \mathcal{W}d\mathcal{M}/dt = \mathcal{F} \tag{75}$$

che per descrivere il mondo materiale necessita evidentemente di accrescere le dette definizioni di $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{F}$.

Considerando a questo proposito l'inesistenza di punti che possano contenere masse (un punto non ha estensione) e l'unicità di $\mathcal{F}$, l'unico significato di (75) che rimane possibile è basato sull'interpretare $\mathcal{P}$ come un punto rappresentativo tra quelli di un volume $\mathcal{V}$ di massa $\mathcal{M}$, che ha $\mathcal{F}$ come risultante di tutte le forze che subisce e la cui superficie esterna è generalmente attraversabile da materia.

Però in questo modo (75) appare inevitabilmente approssimativa se $\mathcal{P}$ sostituisce $\mathcal{V}$ solo perché questo ha dimensioni trascurabili come sufficientemente piccole rispetto quelle che hanno importanza nel dato contesto.

Pertanto riteniamo che tale carattere approssimativo di (75) e ogni suo errore di descrizione del mondo materiale debbano essere eliminati aggiungendo, in quanto peraltro del tutto ovvia, l'ulteriore precisazione dell'essere $\mathcal{P}$ il centro di massa di $\mathcal{V}$.

In queste considerazioni riguardanti (75), possiamo anche considerare $\mathcal{P}$ come un volume infinitesimo che ha $\mathcal{W}$, contiene $\mathcal{M}$ e subisce $\mathcal{F}$, ma in questo modo introduciamo un oggetto fisico ovviamente inesistente nel mondo materiale e che non è definibile come limite.

Le grandezze $\mathcal{M}$ e $\mathcal{MW}$ sono dette massa e quantità di moto di $\mathcal{P}$, ma solo astrattamente poiché un punto non può contenere massa. Tuttavia, analogamente a come (45) è stata dedotta da $\delta\mathrm{M} = \rho\delta\mathrm{V}$, da $\delta\mathrm{M}\mathbf{w} = \rho\mathbf{w}\delta\mathrm{V}$ e l'essere $\delta\mathrm{M}\mathbf{w}$ la quantità di moto di c deduciamo che la quantità di moto di C è $\int_{\mathrm{V}}\rho\mathbf{w}d\mathrm{V}$, conseguendo, da ciò, Æ$\langle\mathfrak{C},\mathfrak{v} / \mathrm{C},\mathrm{V}\rangle$ e (73), che $\mathfrak{M}\mathbf{w}_{\mathfrak{v}}$ è la quantità di moto realmente posseduta da $\mathfrak{C}$.

La (75) include il principio di conservazione della quantità di moto, in quanto afferma che sono costanti le quantità di moto di un punto materiale e di un corpo che hanno nulle le rispettive risultanti di tutte le forze.

La formulazione originaria della seconda legge di Newton non menziona né particolari punti di applicazione di vettori né il concetto di punto materiale (introdotto successivamente da Eulero come è riferito in [5] e [88]). Infatti, usando nomi e concetti attuali, tale formulazione può essere "la risultante di tutte le forze subite da un volume è uguale alla derivata temporale della sua quantità di moto", che si esprime come $\mathcal{F} = d\int_{\mathcal{V}}\rho\mathbf{w}d\mathcal{V}/d\mathrm{t}$ dove $\mathcal{F}$ è la risultante di tutte le forze subite da $\mathcal{V}$. Tuttavia l'anzidetta interpretazione di (75) è confermata dal fatto che la legge in argomento riguarda direttamente non il moto di un volume ma quello del suo centro di massa, poiché se così non fosse avremmo l'indeterminazione del poter corrispondere una stessa risultante a una infinità di moti rotatori di tale volume.

8.2 L'equazione del moto di Cauchy e la nuova legge

La Æ$\langle\mathfrak{M}\mathbf{w}_{\mathfrak{v}} / \mathcal{MW} / (75)\rangle$ implica $d\mathfrak{M}\mathbf{w}_{\mathfrak{v}}/d\mathrm{t} = \mathbf{F}_{\mathrm{T}}$ di cui (74) e (65). Ciò e la genericità di $\mathfrak{v}$ che consente di eliminare gli integrali danno luogo a

$$\rho(\partial\mathbf{w}/\partial\mathrm{t}+\nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}) = \mathbf{f}_{\mathrm{BE}}-\nabla\mathrm{P}-\nabla\bullet\tau_{\mathrm{D}} \tag{76}$$

le cui ρ, $\mathbf{w}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{BE}}$, P e τ_{D} sono funzioni di $\underline{ж}$, e che, per Æ$\langle\mathbf{w} / f / (35)\rangle$ e (67), ha anche la forma

$$\rho d\mathbf{w}(\underline{\mathrm{x}},\mathrm{t})/d\mathrm{t} = \mathbf{f}_{\mathrm{BE}}-\nabla\bullet\tau_{\mathrm{T}}$$

nota come equazione del moto di Cauchy.

Per alcuni autori (e.g. [27], [30], [31], [80]) la seconda legge di Newton espressa da (75) è ritenuta valida solo se M è costante. Tuttavia ciò non riguarda la fondamentale (76) in quanto la sua precedente deduzione non è modificata da tale diminuzione di applicabilità di (75).

Da (67) abbiamo

$$\rho^{-1}(\mathbf{f}_{BE}-\nabla P-\nabla\bullet\tau_D) = \boldsymbol{f}_{ћ}-\rho^{-1}\nabla P = \boldsymbol{f}_T \tag{77}$$

di cui $\boldsymbol{f}_T = \rho^{-1}\mathbf{f}_T$, $\boldsymbol{f}_{ћ} = \rho^{-1}\mathbf{f}_{ћ}$, e dove $\boldsymbol{f}_{ћ}$, $-\rho^{-1}\nabla P$ (in base a (64) e Æ⟨τ_P,δv / τ,δv / (56)⟩) e $\boldsymbol{f}_T$ sono rispettivamente le risultanti per unità di massa di tutte le forze subite da $\delta\mathfrak{v}$, δv e $\delta v \cup \delta\mathfrak{v}$. Moltiplicando per ρ^{-1} o ρ una grandezza per unità di volume (e.g. $\mathbf{f}_T$) o massa (e.g. $\boldsymbol{f}_T$) otteniamo la stessa ma per unità di massa o volume.

Le Æ⟨$\mathbf{w}$ / f / (34)⟩ e (77) di cui Æ⟨$\boldsymbol{f}_{ћ}$ / f / (31)⟩, consentono di scrivere (76) come

$$\partial\mathbf{w}(\underline{ж})/\partial t+d\mathbf{w}_c(\underline{x})/dt = \boldsymbol{f}_{ћc}(\underline{x})-\rho^{-1}(\underline{ж})\nabla P(\underline{ж}) \tag{78}$$

Il limite di (75) per $V \to 0$, nel caso $dM/dt = 0$ che abbiamo se V è il volume di un corpo, dà luogo, in base a $\lim_{V\to 0}(M,F) = (\delta\mathfrak{m},\delta\mathfrak{m}\boldsymbol{f}_{ћc})$, a

$$d\mathbf{w}_c(\underline{x})/dt = \boldsymbol{f}_{ћc}(\underline{x}) \tag{79}$$

Questa afferma l'uguaglianza tra l'accelerazione di un corpuscolo infinitesimo e la risultante per unità di massa di tutte le forze che esso subisce. In letteratura questo concetto, strettamente legato alla seconda legge di Newton, interviene anche come applicazione di tale legge (e.g. (4.3) in [4], sezione 2.1.2 in [6], (1.93) in [47]) o immediatamente evidente (e.g. (2.1) in [85]).

Da (78) e (79) segue

$$\rho(\underline{ж})\partial\mathbf{w}(\underline{ж})/\partial t+\nabla P(\underline{ж}) = 0 \tag{80}$$

che è la nuova e indipendente legge annunciata dal titolo di questo scritto.

La falsità di (80), e quindi anche la presenza di errori nell'argomentazione con cui essa è stata dedotta, potrebbe essere provata da almeno un caso di validità della $\rho\partial\mathbf{w}/\partial t \neq -\nabla P$ la cui $P \equiv P$ fosse accertata dall'essere $\{P,\rho,T\}$ le tre variabili dell'equazione di stato.

Le (78), (79) e (80) sono coerenti con l'inerenza di $\{\mathbf{w}'(\underline{x}(t),t),\boldsymbol{f}_T\}$, $\{\mathbf{w}_c'(\underline{x}(t)),\boldsymbol{f}_{ћc}\}$ e $\{\partial\mathbf{w}(\underline{ж})/\partial t, -\rho^{-1}\nabla P\}$ ai rispettivi $\delta v \cup \delta\mathfrak{v}$, $\delta\mathfrak{v}$ e δv, come si deduce da Æ⟨$\mathbf{w}$ / f / (34),(35)⟩ e (77) in coerenza con la incompatibilità tra Æ⟨$\partial\mathbf{w}/\partial t$ / f / (31)⟩ e costanza delle $\underline{x}$ implicata da ogni $\partial f(\underline{ж})/\partial t$.

9 La nuova legge e i modelli della meccanica del continuo

9.1 Il modello generale e le sue più note specificazioni

Un flusso è una quantità che attraversa, eventualmente trasformandosi i.e. cambiando le proprie qualità, una superficie in un intervallo di tempo; quindi è una quantità scambiata, i.e. rispettivamente consegnata/perduta e ricevuta/acquisita, da due volumi separati da una tale superficie ed è identificabile come una stessa (in valore assoluto) variazione propria di entrambi. Nel sommare i flussi di un volume, i.e. le quantità che esso scambia con il suo ambiente esterno, usiamo la convenzione di considerare rispettivamente positiva o negativa una quantità da esso acquisita o perduta. In coerenza con ciò, un flusso può in particolare essere definito anche come un vettore applicato (e.g. $f\,\boldsymbol{w}_S$ e ϕ_F di sezione 4.2).

Il primo principio della termodinamica è un'equazione di bilancio per l'energia di un volume e di solito è formulata uguagliando la somma dei suoi flussi (e.g. calore e lavoro sono flussi di energia rispettivamente termica e meccanica), più la sua generazione interna ossia la quantità che esso acquisisce o perde in quanto sede di reazioni chimiche e/o nucleari, alla variazione dell'energia totale che esso contiene. Tuttavia generalmente né l'energia totale né la sua variazione hanno espressioni note e indipendenti da tale equazione, e quindi è incognita anche l'energia totale $\mathcal{E}_T$ (per unità di massa o volume) di un dato volume infinitesimo (quali $\delta\mathfrak{v}$, δv, $\delta v \cup \delta\mathfrak{v}$).

Più precisamente, secondo la consueta letteratura, una tale espressione può essere ottenuta da $\mathcal{E}_T$ somma delle energie cinetica e interna, e da un'ulteriore equazione costitutiva i.e. l'equazione di stato calorica. Però a questo riguardo non proseguiamo con ulteriori considerazioni, poiché il primo principio della termodinamica esula da questo lavoro e riteniamo di poterlo trattare più specificamente in seguito.

Il fondamentale modello generale della meccanica del continuo (MCG) è un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (che indichiamo con l'acronimo PDEs di *partial differential equations*) costituito da espressioni di leggi generali valide per ogni sostanza (leggi di bilancio o conservazione) e da equazioni peculiarmente proprie della data sostanza (equazioni costitutive): equazione di continuità i.e. prima delle (46); equazione del moto di Cauchy i.e. (76); equazione di stato (che lega P, ρ, T); equazione costitutiva per gli sforzi (che lega τ_D a variabili tensoriali che descrivono la deformazione, avendo la $\tau_{Dij} = \tau_{Dji}$ che si deduce da Æ⟨τ_D / τ / sezione 7.2.2⟩ ed equivale a un bilancio del momento della quantità di moto rispetto un punto fisso); espressioni di tensori di deformazione in funzione di spostamenti e velocità quali quelle di $\mathbf{e}$, ε, $\dot{\mathbf{e}}$ e $\dot{\varepsilon}$ in sezione 6; primo principio della termodinamica adattato alla meccanica del continuo (i.e. equazione di bilancio per l'energia di un volume infinitesimo) e (se disponibile) equazione di stato calorica.

Nelle 12 equazioni scalari di tale modello, che (come poniamo implicito) rimangono non disponendo dell'equazione di stato calorica e dopo aver applicato il metodo di sostituzione per eliminare i tensori di deformazione e le loro espressioni, abbiamo 13 funzioni incognite di $\underline{ж}$ che esprimono le rispettive incognite ρ, w_1, w_2, w_3, P, T, τ_{D11}, τ_{D22}, τ_{D33}, τ_{D12}, τ_{D13}, τ_{D23}, $\mathcal{E}_T$, potendo inoltre essere presenti altre incognite nell'equazione costitutiva per gli sforzi (quali la λ di (69)).

Una soluzione di un sistema PDEs, numerica come sottintendiamo in quanto non conoscibile quella esatta costituita dalle sue funzioni incognite, consiste in valori di queste e, con particolare riferimento a [14] e [21], è calcolabile solo se il numero di tali funzioni non è maggiore del numero di equazioni indipendenti, nel qual caso il sistema è detto risolvibile (un sistema di tante equazioni indipendenti in altrettante funzioni incognite è anche detto chiuso).

Ciò implica che una soluzione di MCG, che è costituito da 12 equazioni scalari indipendenti in almeno 13 funzioni incognite, la possiamo calcolare solo riducendo abbastanza il numero di funzioni incognite e/o sostituendo almeno una di esse con un'espressione nota che l'approssimi adeguatamente e non contenga ulteriori incognite.

Perciò sottintendiamo le assenze dell'equazione di bilancio dell'energia motivata dall'indisponibilità di una tale espressione di $\mathcal{E}_T$ e dell'equazione di stato motivata dall'essere l'unica dove compare T e dal non avere interesse a questa variabile. Infatti tali assenze non aumentano la differenza tra funzioni incognite ed equazioni che divengono rispettivamente 11 e 10.

Con riferimento in sezione 6, un'equazione costitutiva per gli sforzi, che indichiamo $\tau_D = \tau_D(\mathbf{D},\underline{e})$ di cui $\mathbf{D} \equiv \{\mathbf{e} \vee \varepsilon, \dot{\mathbf{e}} \vee \dot{\varepsilon}\}$ (sottintendendo che può anche essere una forma implicità $f(\tau_D,\mathbf{D},\underline{e}) = 0$), è inevitabilmente approssimativa poiché determinata per mezzo di modelli sub-macroscopici e/o esperimenti, come le altre che caratterizzano una data sostanza, quali l'equazione di stato o le espressioni di calori specifici. Però una $\tau_D = \tau_D(\mathbf{D},\underline{e})$ è affetta da errori di maggiore rilievo in quanto causati da inadeguata descrizione della deformazione fornita da $\mathbf{e}$, ε e $\dot{\varepsilon}$, dall'essere τ_D definito in relazione a $\delta\mathfrak{v}$ come cubo quando però solo una deformazione infinitesima può essere rappresentata da un tale $\delta\mathfrak{v}$, e in ogni caso dall'essere la funzione $\tau_D(\mathbf{D},\underline{e})$ ignota e difficile da approssimare a causa di peculiari difficoltà di individuazione e misurazione delle variabili.

Pertanto MCG, come altro inconveniente ulteriore all'avere almeno una funzione incognita di troppo e alla conseguente necessità di approssimazioni fisiche per pervenire ad un uguale numero di funzioni incognite ed equazioni, è affetto anche dagli errori particolarmente rilevanti tipici di una equazione costitutiva per gli sforzi.

Potendo accettare come sufficientemente piccolo l'errore di approssimare l'equazione di stato con una relazione tra le sole P e ρ (barotropicità), MCG diviene risolvibile se in tali sue 11 equazioni non compaiono incognite ulteriori alle altrettante P, ρ, w_1, w_2, w_3, τ_{D11}, τ_{D22}, τ_{D33}, τ_{D12}, τ_{D13}, τ_{D23}.

Non avendo interesse a distinguere $P\delta$ come la parte di τ_T indicata da (66) e avendo la

$$\nabla P+\nabla\bullet\tau_D = \nabla\bullet\tau_T \tag{81}$$

evidenziata da (67), (76) e $\tau_D = \tau_D(\mathbf{D},\underline{e})$ (il cui $\mathbf{D}$ è sottinteso esplicitato come funzione di $\mathbf{w}$) divengono

$$\rho(\partial\mathbf{w}/\partial t+\nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}) = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\bullet\tau_T \qquad\qquad \tau_T = \tau_T(\mathbf{D},\underline{e}) \tag{82}$$

per cui MCG si riduce a un modello (MPM) risolvibile se nelle sue 10 equazioni non compaiono incognite ulteriori alle altrettante ρ, w_1, w_2, w_3, τ_{T11}, τ_{T22}, τ_{T33}, τ_{T12}, τ_{T13}, τ_{T23}.

Una specificazione di MCG, molto nota per la sua grande generalità nel descrivere moti fluidi, consiste nelle equazioni di Navier-Stokes che si ottengono adottando come equazione costitutiva per gli sforzi la prima di (69). A volte è così chiamata la sola (76) il cui τ_D è espresso da tale adozione. Introducendo (71) nella forma scalare

$$\rho(\partial w_i/\partial t+\Sigma_{j=1,3}w_j\partial w_i/\partial x_j) = f_{BEi}-\partial P/\partial x_i-\Sigma_{j=1,3}\partial\tau_{Dji}/\partial x_j$$

di (76) dove $\mathbf{f}_{BE} \equiv f_{BEi}$, otteniamo

$$\rho(\partial w_i/\partial t+\Sigma_{j=1,3}w_j\partial w_i/\partial x_j-f_{BEi})+\partial P/\partial x_i+\mu\Sigma_{j=1,3}\Sigma_{h=1,3}\Sigma_{k=1,3}\delta_{jikh}\partial^2 w_k/\partial x_h\partial x_j = 0$$

di cui $f_{BEi} \equiv \boldsymbol{f}_{BE} = \rho^{-1}\mathbf{f}_{BE}$ e che è una forma (particolarmente comoda da computerizzare) di (76) sottoposta alla seconda delle (69).

Le equazioni di Navier-Stokes sono famose per le difficoltà di calcolarne soluzioni anche solo numeriche, tanto che il conseguimento di un progresso della loro comprensione è uno dei sette *Millennium Problems* (https://www.claymath.org/millennium-problems) del *Clay Mathematics Institute*. A questo riguardo riteniamo che le peculiarmente forti difficoltà nel risolvere convenientemente tali equazioni applicate ai casi reali siano essenzialmente causate dalle (69) che peraltro sono scarsamente migliorabili a causa degli anzidetti errori peculiarmente implicati da equazioni costitutive per gli sforzi.

Diciamo perfetto o ideale (in quanto a rigore inesistente nel modo materiale) un fluido che verifica

$$\{\tau_{Tij} = 0,\ \tau_{Tii} = \tau_{Tjj};\ \forall i \neq j\} \tag{83}$$

da cui, in coerenza con (66), deduciamo

$$\{\tau_{Dij} = \tau_{Tij} = 0,\ \tau_{Dii} = \tau_{Djj};\ \forall i \neq j\} \qquad \boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{0} \qquad \tau_T = \overline{P}\boldsymbol{\delta} \qquad \overline{P} = \tau_{Tii} = \tau_{Dii}+P \tag{84}$$

In relazione a tali (83) e (84) non abbiamo posto l'invece usualmente immediata $\overline{P} \equiv P$, poiché questa, oltre a non essere immediatamente evidente, è, come vedremo, incompatibile con (80).

Riferendo MCG a un tale fluido abbiamo le seguenti equazioni di Eulero, che, essendo affrancate da (69), semplificano efficacemente quelle di Navier-Stokes in molteplici approssimazioni tecniche nelle quali gli sforzi viscosi sono trascurabili e.g. il flusso inviscido fuori di uno strato limite ([44]). Infatti (81) e $\nabla\bullet\tau_T = \nabla\overline{P}$ (che si deduce da $\tau_T = \overline{P}\boldsymbol{\delta}$ come la $\nabla\bullet\tau_P = \nabla P$ di (64) è stata dedotta da $\tau_P = P\boldsymbol{\delta}$), comportano, come specificazione di MCG, le equazioni di Eulero consistenti in prima di (46) e

$$\rho(\partial\mathbf{w}/\partial t+\nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}) = \mathbf{f}_{BE}-\nabla\overline{P}$$

di cui $\overline{P} = \tau_{Tii}$ e che, essendo un sistema PDEs di 4 equazioni scalari nelle 5 incognite ρ, w_1, w_2, w_3, $\overline{P}$, per divenire risolvibile deve essere integrato da un'ulteriore equazione indipendente priva di incognite diverse dalle dette 5. Tra i modi di ottenere tale risolvibilità abbiamo barotropicità e incompressibilità, rispettivamente consistenti in una correlazione tra le $\{\overline{P},\rho\}$ e nella costanza di $\rho(\underline{\text{ж}})$ con ρ una caratteristica nota della data sostanza.

Le equazioni di Eulero per un fluido incompressibile (MEI) si deducono sostituendo, nelle anzidette, la prima delle (46) con $\nabla\bullet\mathbf{w} = 0$ che si deduce da essa e costanza di $\rho(\underline{\text{ж}})$, e ottenendo così un sistema PDEs risolvibile in quanto di 4 equazioni scalari nelle altrettante incognite w_1, w_2, w_3, $\overline{P}$.

Un fluido incompressibile e immobile ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$) verifica (83) e quindi $\nabla\bullet\tau_T = \nabla\overline{P}$ (di cui $\overline{P} = \tau_{Tii}$). Ciò, (81), forze di volume consistenti nella sola convenzionale gravità standard ($\boldsymbol{f}_{BE} = -g\hat{\boldsymbol{e}}_3$, $g = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ diretto verso l'alto) implicano che per un tale fluido MCG si riduce all'idrostatico MIS

$$\nabla\overline{P} = -\rho g\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{85}$$

che è esattamente risolvibile poiché equivalente alle $\partial\overline{P}/\partial x_1 = \partial\overline{P}/\partial x_2 = 0$ e $\partial\overline{P}/\partial x_3 = -\rho g$ che, usate in un integrale curvilineo, da $\underline{ж}_0$ di cui $\underline{ж}_0 \equiv (x_{01},x_{02},x_{03},t)$ a $\underline{ж}$, della espressione di $d\overline{P}$ che abbiamo da Æ⟨$\overline{P}$ / f / (19)⟩, danno luogo a $\overline{P}(\underline{ж}) = \overline{P}(\underline{ж}_0)+\rho g(x_{03}-x_3)$.

La (85) di cui $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ mostra $\overline{P} \equiv P$ incompatibile con (80) che afferma ∇P relato a $\partial\mathbf{w}(\underline{ж})/\partial t$. Tuttavia $\overline{P} \neq P$ (i.e. $\overline{P} \not\equiv P$) in MEI e MIS può essere dedotta come segue. Le (70) e $\nabla\bullet\mathbf{w} = 0$, che rispettivamente seguono da prima delle (69) e da incompressibilità e/o $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, danno luogo a $\overline{P} = P$. Questa e (84) implicano $\tau_D = \mathbf{0}$ e quindi indeformabilità che però in MEI e MIS è immotivata in quanto non implicata da incompressibilità mentre invece questa è implicata dall'altra (una deformazione può accadere incompressibilmente i.e. variando forma ma non estensione, e una compressione non può accadere indeformabilmente). Ciò può costituire una *demonstratio per absurdum* del doversi escludere, da tali due modelli, (69) e (70), e quindi anche del poterne dedurre la $\overline{P} \neq P$ in base a (84) e $\tau_D \neq \mathbf{0}$.

Però a questo riguardo ha rilievo sia che $\overline{P} = P$ potrebbe conseguire da significative misure di $\{\overline{P},\rho,T\}$ che mostrino queste tre variabili come le sole di un'equazione che di conseguenza sarebbe necessariamente quella di stato dove $\overline{P} \equiv P$, sia che viceversa $\overline{P} \neq P$ potrebbe conseguire da esperimenti che mostrino variazioni di $\overline{P}$ corrispondenti a costanza di $\{\rho,T\}$.

In caso di stazionarietà ($\partial f(\underline{ж})/\partial t = 0$; $\forall f$), incompressibilità, $\boldsymbol{f}_{BE} = -g\hat{\boldsymbol{e}}_3$, le equazioni di Navier-Stokes divengono il seguente fondamentale modello stazionario di un fluido newtoniano, isotropo e incompressibile (MNS)

$$\nabla\bullet\mathbf{w} = 0 \qquad \rho\nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w}+\nabla\bullet\tau_D+\nabla P+\rho g\hat{\boldsymbol{e}}_3 = 0$$

$$\tau_D = \mu((\nabla\mathbf{w})^T+\nabla\mathbf{w}) \tag{86}$$

che è risolvibile poiché costituito da 10 equazioni scalari nelle altrettante incognite w_1, w_2, w_3, P, τ_{D11}, τ_{D22}, τ_{D33}, τ_{D12}, τ_{D13}, τ_{D23}. Nei [51], [52], [53], [54] sono descritte applicazioni, del programma PEEI ([21]) presentato e disponibile (*freeware*) in https://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/), per calcolare le soluzioni di quattro moti fluidi (Hagen-Poiseuille, Taylor-Couette laminare, Couette piano, Poiseuille Piano) modellati da specificazioni di MNS.

La discordanza di (85) di cui $\overline{P} \neq P$ dalla $\nabla P = -g\hat{\boldsymbol{e}}_3$, che seguirebbe da MNS e $|\mathbf{w}| = 0$, si elimina ammettendo che MNS e in particolare (86) valgono solo per $|\mathbf{w}| > 0$.

Le $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, incompressibilità, $\mathbf{f}_{BE} = -\rho g\hat{\boldsymbol{e}}_3$ e adozione della prima delle (68) come equazioni costitutive per gli sforzi che specifica seconda di (82), trasformano MPM nell'elastostatico lineare (MEL)

$$\nabla\bullet\tau_T+\rho g\hat{\boldsymbol{e}}_3 = 0 \qquad \tau_T = \mu((\nabla\mathbf{s})^T+\nabla\mathbf{s})+\lambda(\nabla\bullet\mathbf{s})\boldsymbol{\delta}$$

che è risolvibile in quanto di 9 equazioni scalari nelle altrettante incognite τ_{T11}, τ_{T22}, τ_{T33}, τ_{T12}, τ_{T13}, τ_{T23}, s_1, s_2, s_3, e che, nell'ambito di importanti discipline quali la progettazione di componenti meccanici e la scienza delle costruzioni, ha il larghissimo e fondamentale uso spiegato, a fronte degli errori generalmente indotti da equazione costitutiva per gli sforzi e astrattezza dell'incompressibilità, dalla tipica piccolezza degli spostamenti trattati e dall'assenza di tali errori nel caso di $|\mathbf{s}|$ infinitesimo. In [55], [56], [57], [58] sono descritte applicazioni dell'anzidetto programma PEEI ([21]) per calcolare la soluzione di quattro casi elastostatici (torsione elastica di una barra circolare, compressione idrostatica di una sfera elastica, pura flessione elastica di una barra prismatica, estensione assiale elastica di un'asta prismatica) modellati da specificazioni di MEL.

9.2 L'influenza della nuova legge e un nuovo modello generale

In assenza di (80), MIS, MEL e MNS non sono sottoposti alla condizione

$$\{\mathsf{P}(\underline{\text{ж}}) \text{ e } \mathsf{T}(\underline{\text{ж}}) \text{ entrambe costanti}\} \tag{87}$$

poiché le loro stazionarietà e incompressibilità non impediscono $\nabla\mathsf{P} \neq \mathbf{0}$ e $\nabla\mathsf{T} \neq \mathbf{0}$ conformi all'equazione di stato.

Invece, dovendo questa equazione vigere anche se assente nel dato modello, e seguendo $\nabla\mathsf{P} = \mathbf{0}$ da (80) e stazionarietà, abbiamo

$$\{(80), (\partial f(\underline{\text{ж}})/\partial \mathtt{t} = 0;\ \forall f), \rho(\underline{\text{ж}}) \text{ costante}\} \Rightarrow (87)$$

per cui (80) implica che MIS, MEL e MNS sono sottoposti a $\mathsf{P}(\underline{\text{ж}})$ costante ed anche a isotermia ($\mathsf{T}(\underline{\text{ж}})$ costante).

Tuttavia ciò non sembra costituire un'incongruenza decisiva, poiché, anche se tali tre modelli non escludono esplicitamente $\nabla\mathsf{T} \neq \mathbf{0}$, però normalmente concernono contesti nei quali T e $\nabla\mathsf{T}$ sono privi di interesse, rilievo e riscontri applicativi, e quindi MIS, MEL e MNS sono *de facto* implicitamente integrati dalla isotermia che gli impone (80). Inoltre, in alternativa a tale isotermia, (80) e $\nabla\mathsf{T} \neq \mathbf{0}$ divengono compatibili se è possibile ammettere che, anche con $\mathsf{P}(\underline{\text{ж}})$ costante, i dati gradienti di T e l'equazione di stato non comportano gradienti di ρ tanto grandi da compromettere l'incompressibilità approssimativamente propria dei tre modelli in oggetto.

Da (79) e $Æ\langle \mathbf{w}, \boldsymbol{f}_{ħ} \,/\, f \,/\, (31),(34)\rangle$ deduciamo $\nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w} = \boldsymbol{f}_{ħ}$. Questa, (77) e $\boldsymbol{f}_{\mathrm{BE}} = \rho^{-1}\mathbf{f}_{\mathrm{BE}}$ danno luogo a

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{BE}} - \rho^{-1}\nabla\bullet\tau_{\mathrm{D}} = \nabla\mathbf{w}\bullet\mathbf{w} \tag{88}$$

Un sistema di equazioni ha le stesse soluzioni di un altro dedotto da esso sostituendo un'equazione con una combinazione lineare di questa e altre dello stesso sistema. Perciò, essendo (76) una combinazione lineare di (80) e (88), il sistema, ottenibile aggiungendo la nuova legge (80) a MCG, ha le stesse soluzioni di quello che si distingue come NMG e si deduce da MCG eliminando (76) e aggiungendo (80) e (88).

Gli stessi MNS, MIS e MEL sono deducibili anche da NMG, come da MCG ma con la differenza della (87) imposta come detto da (80).

La risolvibilità di NMG non è peggiore di quella di MCG, poiché ha tre equazioni scalari in più e le stesse funzioni incognite, anche se però la calcolabilità di soluzioni di NMG dovrebbe essere verificata di caso in caso, poiché l'avere almeno tante equazioni indipendenti in altrettante incognite è una condizione necessaria ma non sufficiente.

A questo riguardo riteniamo tuttavia di preminente rilievo che il confronto tra MCG e NMG è comunque di minore interesse, poiché sono entrambi affetti dall'errore di modellatura del mondo materiale causato dai suddetti più rilevanti errori introdotti dalle equazioni costitutive per gli sforzi.

Notiamo invece più interessante il modello *MOD* che si ottiene eliminando, da NMG, (88) e le equazioni costitutive per gli sforzi, e che è quindi composto da prima delle (46), (80), equazione di stato ed equazione di conservazione dell'energia. L'avere così eliminato anche $\boldsymbol{f}_{BE}$ insieme a (88) non è preoccupante poiché una funzione, che analogamente a $\boldsymbol{f}_{BE}$ esprime le forze di volume, è certamente presente nell'equazione di conservazione dell'energia.

Infatti tale *MOD* ha 6 equazioni scalari dove compaiono le sole 7 funzioni incognite che esprimono le rispettive ρ, w_1, w_2, w_3, P, T, $\mathcal{E}_T$, e quindi, oltre al decisivo pregio di non essere affetto dai detti peculiari errori causati dalle equazioni costitutive per gli sforzi, ha anche quello dell'avere la sua risolvibilità come condizione necessaria la sostituzione di una sola funzione incognita con una sua adeguata approssimazione nota.

A questo riguardo anticipiamo che un prossimo lavoro riguarderà la teoria esposta nei [77], [78], [79], [81] ed invero estremamente innovativa per vari aspetti oltre che per il decisivo risultato ravvisabile in un'equazione di conservazione dell'energia di validità generale, indipendente e dove possiamo eliminare sia $\mathcal{E}_T$ sia incognite ulteriori alle altre 6 di *MOD*.

Un tale *MOD*, privo di errori di modellatura del mondo materiale diversi da quelli (ineliminabili ma di solito riducibili) di ogni equazione costitutiva che descrive una certa sostanza, e matematicamente risolvibile senza la necessità di approssimazioni delle leggi valide per ogni sostanza in quanto ha 6 equazioni in altrettante incognite, potrà costituire una generale rappresentazione termomeccanica, ancora assente nella meccanica del continuo e la cui peculiare importanza anche filosofica consegue dall'essere questa la scienza della comune realtà sensoriale.

Nel *MOD*, come pure negli altri modelli anzidetti, non sono stati posti vincoli conseguenti dal secondo principio della termodinamica (rappresentato nella meccanica del continuo dalla disuguaglianza di Clausius-Duhem), che però possono essere presenti nelle relazioni costitutive. Tuttavia a questo riguardo riteniamo che i risultati realistici e conformi a tale disuguaglianza debbano conseguire dal realismo delle aggiuntive condizioni (quali quelle iniziali o al contorno) sempre necessarie per la soluzione di un sistema PDEs.

10 Conclusioni

Ritenendo soddisfacentemente conseguito lo scopo di questo lavoro ossia un'affidabile teorizzazione della validità della nuova legge (80), ci accingiamo a definire analoghe argomentazioni per gli altri innovativi principi del *MOD*, che, come accennato nelle sezioni 1 e 9.2, sono essenzialmente un'equazione di bilancio dell'energia dalla quale possiamo eliminare l'ulteriore funzione incognita che esprime l'energia totale (in quanto ne stabiliamo un'espressione che non contiene altre incognite oltre quelle già presenti) e un'espressione del calore generato da attrito.

Infatti, compiuto un tale secondo passo, rimane l'attività, pressoché illimitata ma rapidamente soddisfacente in assenza di risultati sfavorevoli, del verificare la veridicità del *MOD* (cioè la sua capacità di rappresentare il reale mondo materiale) risolvendolo per gli innumerevoli possibili casi applicativi e potendo a questo proposito già contare sull'abbondantemente convalidato *solver* PEEI ([21]) di sistemi PDEs.

Bibliografia

1. H. ALTENBACH, *Fundamentals of continuum mechanics – classical approaches and new trends*, J. Phys.: Conf. Ser. 991 012003, April 2018, doi: 10.1088/1742-6596/991/1/012003.

2. G. LORENZONI, *The True Probability of a Confidence Interval*, November 2018, Aracne, Roma.

3. D. GRAY, W. HUEBSCH, *The balance principle and the Reynolds transport theorem in introductory fluid mechanics*, August 2017, doi: 10.1177/0306419017726629.

4. X. OLIVER, C. A. DE SARACIBAR, *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems*, 2nd ed., March 2017, doi: 10.13140/RG.2.2.25821.20961.

5. M. STAN, *Euler, Newton, and Foundations for Mechanics*, The Oxford Handbook of Newton, 2017, doi: 10.1093/oxfordhb/9780199930418.013.31.

6. J. MÁLEK, V. PRŮŠA, *Derivation of Equations for Continuum Mechanics and Thermodynamics of Fluids*, Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids, editors Giga & Novotný, Springer, 2016, doi: 10.1007/978-3-319-10151-4_1-1.

7. K. R. RAJAGOPAL, *On the Flows of Fluids Defined through Implicit Constitutive Relations between the Stress and the Symmetric Part of the Velocity Gradient*, Vol. 1, Fluids 2016, doi: 10.3390/fluids1020005.

8. S. ZUCCHER, *Note di Fluidodinamica*, Università degli Studi di Verona, 2016, http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/fd-zuccher.pdf.

9. G. BURESTI, *A note on Stokes' hypothesis*, Acta Mech 226, 3555–3559 (2015), doi: 10.1007/s00707-015-1380-9.

10. R. MAURI, *Thermodynamics and Evolution*, In: *Transport Phenomena in Multiphase Flows*, Fluid Mechanics and Its Applications, vol 112. Springer Cham 2015, doi: 10.1007/978-3-319-15793-1_1.

11. R. ABEYARATNE, *Continuum Mechanics*, Volume II of Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids, Department of Mechanical Engineering, 77 Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA 02139-4307, USA, 2015, http://web.mit.edu/abeyaratne/lecture notes.html.

12. T. RUGGERI, *New Frontiers In Non-Equilibrium Thermodynamics*, Conference: Frontiere - Accademia Nazionale dei Lincei - Atti dei Convegni Lincei - Bardi Edizione, Vol. 314, Roma 2015.

13. A. BERTRAM, R. GLÜGE, *Solid Mechanics - Theory, Modeling, and Problems*, Springer International Publishing Switzerland 2015, doi: 10.1007/978-3-319-19566-7.

14. G. LORENZONI, *A method to numerically solve every differential analytical model*, Bollettino di Matematica pura e applicata dell'Università degli Studi di Palermo, Vol. VIII, dicembre 2015.

15. D. KLEPPNER, R. KOLENKOW, *An Introduction to Mechanics*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2014, http://www.cambridge.org/9780521198110.

16. F. H. KOENEMANN, *Cauchy's stress theory in a modern light*, Eur. J. Phys. 35 (2014) 015010 (15pp), doi: 10.1088/0143-0807/35/1/015010.

17. W. CHEN, *The renaissance of continuum mechanics*, Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering), Zhejiang University and Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, doi: 10.1631/jzus.A1400079.

18. A. SHARMA, *Isaac Newton, Leonhard Euler and F = ma*, Physics Essays, Volume 27, Number 3, September 2014, pp. 503-509(7), doi: 10.4006/0836-1398-27.3.503.

19. A. TANGREDI, G. FROSALI, *Meccanica dei Continui*, Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Università degli Studi di Firenze, Firenze 2014.

20. F. COSTA, G. PERUZZI, *I Principia di Newton - Le basi della dinamica classica*, Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei", Università degli Studi di Padova, aprile 2014.

21. G. LORENZONI, *PEEI: a Computer Program for the Numerical Solution of Systems of Partial Differential Equations.*, https://www.giacomo.lorenzoni.name/peei/, 2014.

22. G. LORENZONI, *Argomentazioni analitiche di probabilità e statistica*, Aracne, Roma 2013.

23. N. PHAN-THIEN, *Tensor Notation*, In: *Understanding Viscoelasticity. Graduate Texts in Physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, doi: 10.1007/978-3-642-32958-6_1.

24. A. TAMIR, *Conservation Law of Mass*, J. Chem. Eng. Process. Technol., Vol. 4, I. 8, 2013, doi: 10.4172/2157-7048.1000e114.

25. G. GUZZETTA, *Relating Deformation and Thermodynamics: An Opportunity for Rethinking Basic Concepts of Continuum Mechanics*, Entropy 2013, 15, 2548-2569; doi: 10.3390/e15072548.

26. D. VIOLEAU, *Fluid Mechanics and the SPH Method*, Oxford University Press, 2012.

27. B. SAMARDŽIJA, S. ŠEGAN, *Movement of a Body With Variable Mass*, Publ. Astron. Obs. Belgrade No. 91 (2012), 97 - 104.

28. E. TADMOR, R. MILLER, R. ELLIOTT, *Continuum Mechanics and Thermodynamics From Fundamental Concepts to Governing Equations*, Cambridge University Press 2012, http://www.cambridge.org/9781107008267.

29. V. QUINN, A. STUBBLEFIELD, *Continuum and Solid Mechanics (Concepts and Applications)*, Academic Studio, Delhi 2012.

30. Y. ICHIKAWA, A. P. S. SELVADURAI, *Introduction to Continuum Mechanics*, In: *Transport Phenomena in Porous Media*, Springer Berlin Heidelberg 2012, doi: 10.1007/978-3-642-25333-1_2.

31. D. GROSS, W. HAUGER, J. SCHRÖDER, W. A. WALL, S. GOVINDJEE, *Engineering Mechanics 3 - Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011, doi: 10.1007/978-3-642-14019-8.

32. J. W. RUDNICKI, *Fundamentals of Continuum Mechanics*, Department of Civil and Environmental Engineering and Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, Evanston, IL, 2011.

33. Y. I. DIMITRIENKO, *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*, Springer Science+Business Media B.V. 2011, doi: 10.1007/978-94-007-0034-5.

34. Z. MARTINEC, *Continuum Mechanics (Lecture Notes)*, Department of Geophysics, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, 2011.

35. H. WONG, C. J. LEO, N. DUFOUR, *Thermodynamics in Mono and Biphasic Continuum Mechanics*, 2011, doi: 10.5772/20235.

36. B. POURCIAU, *Is Newton's second law really Newton's?*, American Journal of Physics 79, 1015 (2011); doi: 10.1119/1.3607433.

37. A. BORRELLI, *Meccanica dei Continui*, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara, 2011.

38. A. RUINA, R. PRATAP, *Introduction to Statics and Dynamics*, Oxford University Press (Preprint), 2010.

39. M. E. GURTIN, E. FRIED, L. ANAND, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Cambridge University Press, 2010, http://www.cambridge.org/9780521405980.

40. J. R. RICE, *Solid Mechanics*, School of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge USA 2010, http://esag.harvard.edu/rice/e0_Solid_Mechanics_94_10.pdf.

41. W. M. LAI, E. KREMPL, D. RUBIN, *Introduction to Continuum Mechanics*, 4th ed., Elsevier Inc. 2010.

42. J. L. WEGNER, J. B. HADDOW, *Elements Of Continuum Mechanics And Thermodynamics*, Cambridge University Press 2009, http://www.cambridge.org/9780521866323.

43. V. Y. FORTOV, *Equation of State*, Thermopedia, 11 February 2011, doi: 10.1615/AtoZ.e.equation_of_state.

44. V. M. EPIFANOV, *Boundary Layer*, Thermopedia, 16 March 2011, doi: 10.1615/AtoZ.b.boundary_layer.

45. S. NAIR, *Introduction To Continuum Mechanics*, Cambridge University Press 2009, http://www.cambridge.org/9780521875622.

46. F. IRGENS, *Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.

47. A. A. SHABANA, *Computational Continuum Mechanics*, Cambridge University Press 2008, http://www.cambridge.org/9780521885690.

48. L.H. SÖDERHOLM, *Basic Continuum Mechanics*, Department of Mechanics, KTH, S-100 44 Stockholm, Sweden, Stockholm 2008.

49. O. GONZALEZ, A. M. STUART, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press 2008, http://www.cambridge.org/9780521886802.

50. J. N. REDDY, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press 2008, http://www.cambridge.org/9780521870443.

51. G. LORENZONI, *Hagen-Poiseuille Flow*, PEEI's application, 16/11/2008, doi: 10.5281/zenodo.2530110.

52. G. LORENZONI, *Laminar Taylor-Couette Flow*, PEEI's application, 14/11/2008, doi: 10.5281/zenodo.2296323.

53. G. LORENZONI, *Plane Couette Flow*, PEEI's application, 28/10/2008, doi: 10.5281/zenodo.2530134.

54. G. LORENZONI, *Plane Poiseuille Flow*, PEEI's application, 26/10/2008, doi: 10.5281/zenodo.2645347.

55. G. LORENZONI, *Elastic Torsion of a Circular Bar*, PEEI's application, 16/09/2008, doi: 10.5281/zenodo.3229590.

56. G. LORENZONI, *Hydrostatic Compression of a Elastic Sphere*, PEEI's application, 16/09/2008, doi: 10.5281/zenodo.3068165.

57. G. LORENZONI, *Pure Elastic Bending of a Prismatic Bar*, PEEI's application, 05/09/2008, doi: 10.5281/zenodo.2759475.

58. G. LORENZONI, *Elastic Axial Extension of a Prismatic Rod*, PEEI's application, 03/09/2008, doi: 10.5281/zenodo.2759467.

59. L. A. SEGEL, G. H. HANDELMAN, *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2007.

60. G. QUERZOLI, *Dispense di Meccanica dei Fluidi*, Dipartimento di Ingegneria del Territorio, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Cagliari, 2006.

61. A. ROMANO, R. LANCELLOTTA, A. MARASCO, *Continuum Mechanics using Mathematica®. Fundamentals, Applications and Scientific Computing*, Birkhäuser, Boston 2006.

62. H. C. WU, *Continuum Mechanics and Plasticity*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton 2005.

63. C. MAN, R. L. FOSDICK, *The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics*, Essays and Papers Dedicated to the Memory of Clifford Ambrose Truesdell III, Springer Science + Business Media Inc. 2005.

64. D. ZACCARIA, *Concetti della Meccanica del Continuo*, Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Trieste, 2005.

65. D. TONG, *Classical Dynamics*, University of Cambridge Part II Mathematical Tripos, Michaelmas Term, 2004 and 2005, http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics.html.

66. M. JIRÁSEK, *Nonlocal Theories in Continuum Mechanics*, Acta Polytechnica Vol. 44 No. 5–6/2004, Czech Technical University Publishing House, https://ojs.cvut.cz/ojs/index.php/ap/article/view/610.

67. R. TEMAM, A. MIRANVILLE, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, 2nd ed., Cambridge University Press 2005, http://www.cambridge.org/9780521617239.

68. J. C. KOLECKI, *An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering*, NASA/TM—2002-211716, National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2002.

69. T. HOPMAN, *Introduction to indicial notation*, Department of Physics, University of Guelph, 2002.

70. I. V. KAZACHKOV, V. A. KALION, *Numerical Continuum Mechanics*, Vol. 1, Div. of Heat and Power Technology, Department of Energy Technology, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.

71. P. M. NAGHDI, *P. M. Naghdi's Notes on Continuum Mechanics*, Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, ME 185, 2001.

72. G.T. MASE, G.E. MASE, *Continuum Mechanics for Engineers*, 2nd edition, CRC Press, Boca Raton 1999.

73. V. E. SAOUMA, *Introduction to Continuum Mechanics and Elements of Elasticity/Structural Mechanics*, Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado 1998.

74. J. BONET, R. D. WOOD, *Nonlinear Continuum Mechanics For Finite Element Analysis*, Cambridge University Press 1997.

75. J.H. HEINBOCKEL, *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, Department of Mathematics and Statistics Old Dominion University, 1996.

76. M. GAD-EL-HAK, *Stokes' Hypothesis for a Newtonian, Isotropic Fluid*, Journal of Fluids Engineering, Vol. 117, pp. 3–5, March 1995, doi: 10.1115/1.2816816.

77. G. LORENZONI, *Una definizione di procedimenti numerici nella nuova termodinamica di equilibrio (NTE)*, Tecnica Italiana n.2, 1995, G. Zorzut Cormons (Gorizia).

78. G. LORENZONI, *Una conferma numerica di una nuova termodinamica di equilibrio (NTE)*, Tecnica Italiana n.2, 1994, G. Zorzut Cormons (Gorizia).

79. G. LORENZONI, *Un modello termomeccanico di applicabilità generale basato su una nuova formulazione del primo principio della termodinamica*, Tecnica Italiana n.1, 1993, G. Zorzut Cormons (Gorizia).

80. A. R. PLASTINO, J. C. MUZZIO, *On the use and abuse of Newton's second law for variable mass problems*, Celestial Mech Dyn Astr 53, 227–232 (1992), doi: 10.1007/BF00052611.

81. G. LORENZONI, *È proposta la possibilità di nuove formulazioni quantitative del primo e secondo principio*, Atti del 47-mo Congresso Nazionale della Associazione Termotecnica Italiana, Parma 15-18 settembre 1992.

82. C. A. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, 2nd ed., Academic Press Inc., 1991.

83. A. RUTHERFORD, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications Inc., New York 1989.

84. D. C. KAY, *Tensor Calculus*, McGraw-Hill Companies Inc., New York 1988.

85. L.D. LANDAU, E.M. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford 1987.

86. M. E. GURTIN, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press Inc., New York 1981.

87. L.E. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs 1969.

88. C. TRUESDELL, *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1968.

89. M. E. GURTIN, W. O. WILLIAMS, *An axiomatic foundation for continuum thermodynamics*, Department of Mathematical Sciences, Carnegie Mellon University, 1967.

90. H. SEMAT, R. KATZ, *Physics, Chapter 11: Rotational Motion (The Dynamics of a Rigid Body)*, University of Nebraska - Lincoln, Research Papers in Physics and Astronomy, Robert Katz Publications, 1958, http://digitalcommons.unl.edu/physicskatz/141.

91. H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Methuen & Co. Ltd., London, 1948.

92. I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Mathematical Principles Of Natural Philosophy)*, translated by Andrew Motte, originally published in latin in 1687, published in english in 1728, edition created and published by Global Grey 2015.