Displacement as function of strain and rotation tensors.

Definitions and positions

- *Coordinate system*: Cartesian
- *Coordinates*: $\underline{x}$ of which $\underline{x}\equiv\{x_i;i=1,3\}$, $\underline{x}$ a point of the deformed medium.
- *Coordinate versors*: $\{\boldsymbol{\upsilon}_i;i=1,3\}$
- *Displacement*: $\mathbf{s}$ of which $\mathbf{s}=\mathbf{s}(\underline{x})\equiv\Sigma_{i=1,3}(\mathsf{s}_i(\underline{x})\cdot\boldsymbol{\upsilon}_i)$
- *Strain and rotation tensors*: ε_{ij} and ω_{ij} of which $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\underline{x})\equiv(\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j+\partial\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_i)/2$ $\omega_{ij}=\omega_{ij}(\underline{x})\equiv(\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j-\partial\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_i)/2$ $\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j=\varepsilon_{ij}(\underline{x})+\omega_{ij}(\underline{x})$
- *Total differential of $f(\underline{x})$*: $df(\underline{x})$ of which $df(\underline{x})\equiv\Sigma_{i=1,3}((\partial f(\underline{x})/\partial x_i)\cdot dx_i)$
- *Curvilinear abscissa*: c of which $\mathsf{A}\leq\mathsf{c}\leq\mathsf{B}$ $\underline{x}(\mathsf{c})\equiv\{x_i(\mathsf{c});i=1,3\}$ $\underline{x}_\mathsf{A}\equiv\{x_{\mathsf{A}i};i=1,3\}=\underline{x}(\mathsf{A})$ $\underline{x}_\mathsf{B}\equiv\{x_{\mathsf{B}i};i=1,3\}=\underline{x}(\mathsf{B})$ $\mathbb{s}_i(\mathsf{c})\equiv\mathsf{s}_i(\underline{x}(\mathsf{c}))$ $\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\equiv\varepsilon_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))$ $\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\equiv\omega_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))$

- ***Deductions***

- $d\mathsf{s}_i(\underline{x})=\Sigma_{j=1,3}((\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j)\cdot dx_j)=\Sigma_{j=1,3}(\varepsilon_{ij}(\underline{x})\cdot dx_j+\omega_{ij}(\underline{x})\cdot dx_j)$
- $d\mathsf{s}_i(\underline{x}(\mathsf{c}))=\Sigma_{j=1,3}(\varepsilon_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))\cdot dx_j(\mathsf{c})+\omega_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))\cdot dx_j(\mathsf{c}))$
- $d\mathbb{s}_i(\mathsf{c})=\Sigma_{j=1,3}(\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\cdot dx_j(\mathsf{c})+\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot dx_j(\mathsf{c}))=\Sigma_{j=1,3}(\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\cdot x_j'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c}+\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot x_j'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c})$
- $d\mathbb{s}_i(\mathsf{c})=\Sigma_{j=1,3}(\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\cdot x_j'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c}-\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))'\cdot d\mathsf{c})$
- $\mathbb{s}_i(\mathsf{B})-\mathbb{s}_i(\mathsf{A})=\Sigma_{j=1,3}(\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}(\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\cdot x_j'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c})-\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}(\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))'\cdot d\mathsf{c}))$ (1)
- From $\int_{a,b}(f(x)\cdot g'(x)\cdot dx)=f(b)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-\int_{a,b}(g(x)\cdot f'(x)\cdot dx)$ (equation (2.4.4.26) in [Argomentazioni analitiche di probabilità e statistica.]) follows
- $\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}(\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))'\cdot d\mathsf{c})=\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{B})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{B}))-\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{A})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{A}))-\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}((x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))\cdot\mathbb{\omega}_{ij}'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c})=$ $-\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{A})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_{\mathsf{A}j})-\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}((x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))\cdot\mathbb{\omega}_{ij}'(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c})$ (2)
- $\mathbb{\omega}_{ij}'(\mathsf{c})=d\omega_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))/d\mathsf{c}=\Sigma_{k=1,3}((\partial\omega_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_k)\cdot x_k'(\mathsf{c}))$ (3)
- $\partial\omega_{ij}(\underline{x})/\partial x_k=0.5\cdot\partial(\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j-\partial\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_i)/\partial x_k=(\partial^2\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j\partial x_k-\partial^2\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_i\partial x_k)/2=$ $(\partial^2\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_j\partial x_k+\partial^2\mathsf{s}_k/\partial x_i\partial x_j-(\partial^2\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_i\partial x_k+\partial^2\mathsf{s}_k/\partial x_i\partial x_j))/2=$ $(\partial(\partial\mathsf{s}_i(\underline{x})/\partial x_k+\partial\mathsf{s}_k/\partial x_i)/\partial x_j-\partial(\partial\mathsf{s}_j(\underline{x})/\partial x_k+\partial\mathsf{s}_k/\partial x_j)/\partial x_i)/2=\partial\varepsilon_{ik}(\underline{x})/\partial x_j-\partial\varepsilon_{jk}(\underline{x})/\partial x_i$ (4)
- From (4) (3) (2) follows
- $\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}(\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{c})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))'\cdot d\mathsf{c})=-\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{A})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_{\mathsf{A}j})-\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}((x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))\cdot\Sigma_{k=1,3}((\partial\varepsilon_{ik}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_j-$ $\partial\varepsilon_{jk}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_i)\cdot x_k'(\mathsf{c}))\cdot d\mathsf{c})$. From this and (1) follows
- $\mathbb{s}_i(\mathsf{B})=\mathbb{s}_i(\mathsf{A})+\Sigma_{j=1,3}(\mathbb{\omega}_{ij}(\mathsf{A})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_{\mathsf{A}j})+$ $\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}((\mathbb{\varepsilon}_{ij}(\mathsf{c})\cdot x_j'(\mathsf{c})+(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))\cdot\Sigma_{k=1,3}((\partial\varepsilon_{ik}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_j-\partial\varepsilon_{jk}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_i)\cdot x_k'(\mathsf{c})))\cdot d\mathsf{c}))$
- $\mathsf{s}_i(\underline{x}_\mathsf{B})=\mathsf{s}_i(\underline{x}_\mathsf{A})+\Sigma_{j=1,3}(\omega_{ij}(\underline{x}_\mathsf{A})\cdot(x_{\mathsf{B}j}-x_{\mathsf{A}j}))+\int_{\mathsf{A},\mathsf{B}}(\Theta_i(\mathsf{c})\cdot d\mathsf{c})$ (5)
- $\Theta_i(\mathsf{c})\equiv\Sigma_{j=1,3}(\varepsilon_{ij}(\underline{x}(\mathsf{c}))\cdot x_j'(\mathsf{c})+(x_{\mathsf{B}j}-x_j(\mathsf{c}))\cdot\Sigma_{k=1,3}((\partial\varepsilon_{ik}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_j-\partial\varepsilon_{jk}(\underline{x}(\mathsf{c}))/\partial x_i)\cdot x_k'(\mathsf{c})))$